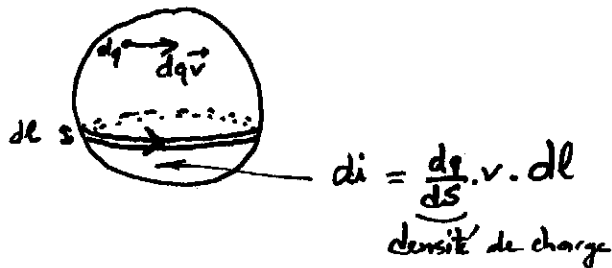


Partie I:

I-1]

Q1 - $\vec{\mu} = I \cdot \pi R^2 \vec{e}_z$

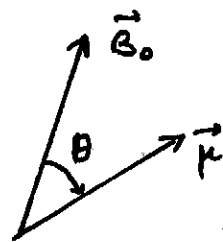
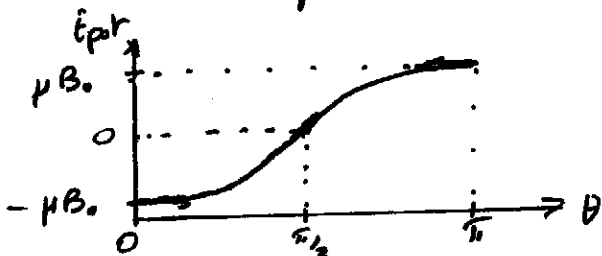
Q2 - Cette sphère peut être vue comme un ensemble de spires circulaires. Le moment dipolaire étant additif, cette sphère a un moment dipolaire ; tous les termes de la somme étant portés par $\vec{e}_z$, le moment résultant est selon $\vec{e}_z$.



Q3 - L'énergie potentielle d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ étant $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, les moments magnétiques admettent le "Joule par Tesla" comme unité SI.

Q4 - À l'équilibre, E_{pot} sera extrême. Si on réfère la "position" (j'aurais dit orientation) du dipôle par l'angle θ qu'il fait avec $\vec{B}_0$, l'énergie potentielle s'écrit:

$$E_{pot} = -\mu \cdot B_0 \cdot \cos\theta$$



Les orientations d'équilibre sont :

- $\theta = 0$ ($\vec{\mu}$ et $\vec{B}$ alignés et de même sens) (stable)
- $\theta = \pi$ ($\vec{\mu}$ et $\vec{B}$ alignés et de sens opposés) (instable)

Q5 - $\Delta E_{pot} = 2\mu B_0$; AN: $\Delta E_{pot} = 2,8 \cdot 10^{-28} \text{ J} = \underline{1,75 \cdot 10^{-7} \text{ eV}}$

Q6 - $k.T \approx 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ $\frac{\Delta E_{\text{rot}}}{kT} \approx 7 \cdot 10^{-6} \ll 1$ (2)

donc l'agitation thermique "retourne" sans difficulté les moments magnétiques d'un noyau d'hydrogène soumis à un champ d'1 Tesla.

Q7 - $kT \ll \text{énergie liaison OH}$
 $kT \ll \text{énergie d'ionisation H}$) l'agitation thermique ne "perturbe pas" (n'excite pas) ces états-liés.

Q8 - $p(E) \propto e^{-E/kT}$

Q9 - On a
$$\begin{cases} N_+ = N \cdot p(E = +\mu B_0) \\ N_- = N \cdot p(E = -\mu B_0) \end{cases}$$

donc
$$\frac{N_+}{N_-} = e^{-2\mu B_0/kT}$$

Or $\frac{2\mu B_0}{kT} \approx 7 \cdot 10^{-6}$ (cf Q6) donc $\frac{N_+}{N_-} \approx 1 - \frac{2\mu B_0}{kT}$

donc $\frac{N_+}{N_-} \approx 1 - 7 \cdot 10^{-6}$

Q10 - $N_- > N_+$: l'énergie la plus basse correspond à l'état le plus peuplé. (donc $N_+ \approx N_-$)

Q11 -
$$\eta_0 = \frac{e^{+\mu B_0/kT} - e^{-\mu B_0/kT}}{e^{+\mu B_0/kT} + e^{-\mu B_0/kT}} = \frac{1 - e^{-2\mu B_0/kT}}{1 + e^{-2\mu B_0/kT}} \approx \frac{\mu B_0}{kT}$$

Q12 - $\eta_0 = 3,3 \cdot 10^{-6}$ Ces deux niveaux sont quasiment équi-peuplés...

I-2)

(3)

$$Q13 - \vec{\mu}_e = \underbrace{(-e)}_i \underbrace{\frac{v}{2\pi r_B}}_S \times \pi r_B^2 \times \vec{e}_z \quad \text{danc} \quad \boxed{\vec{\mu}_e = -\frac{evr_B}{2} \vec{e}_z}$$

$$Q14 - \vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \quad \text{danc} \quad \boxed{\vec{\sigma}_0 = mvr_B \vec{e}_z}$$

$$Q15 - \vec{\mu}_e = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma}_0 \quad ; \quad \boxed{\gamma_e = -\frac{e}{2m}} \quad \text{AN: } \underline{\gamma_e = 8,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}}$$

$$Q16 - \mu_p = \gamma_p \sigma_p \quad |\sigma_p| = \frac{\hbar}{2} \quad \text{danc} \quad |\mu_p| \approx 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

(values au format !)

$$Q17 - h\nu = 2\mu_p B_0 \quad (\Rightarrow) \quad \nu = \frac{2}{h} \times \gamma_p \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot B_0$$

$$(\Rightarrow) \quad \boxed{\nu = \frac{\gamma_p B_0}{2\pi}}$$

$$Q18 - \nu = 4,2 \cdot 10^7 \text{ Hz} \quad \text{soit} \quad \lambda \approx 7,1 \text{ nm}$$

I-3)

$$Q19 - \text{TMC: } \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 \quad \text{or} \quad \vec{\mu} = \gamma \vec{\sigma}$$

$$\text{danc} \quad \underline{\underline{\frac{d\vec{\mu}}{dt} = (-\gamma \vec{B}_0) \wedge \vec{\mu} \quad ; \quad \vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0}}$$

$$Q20 - \bullet \quad \vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu} \perp \vec{\mu}$$

$$\text{danc} \quad \frac{d\vec{\mu}^2}{dt} = 0 \quad \text{danc} \quad \underline{\underline{\|\vec{\mu}\| = \text{cte}}}$$

$$\bullet \quad \vec{e}_z \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu} \perp \vec{\omega}_0 \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_0 = -\omega_0 \vec{e}_z$$

$$\text{danc} \quad \underline{\underline{\frac{d(\vec{e}_z \cdot \vec{\mu})}{dt} = 0}} \quad \text{danc} \quad \underline{\underline{\vec{e}_z \cdot \vec{\mu} = \text{cte}}}$$

Q21 & 22 - Soit R le référentiel du labo

(4)

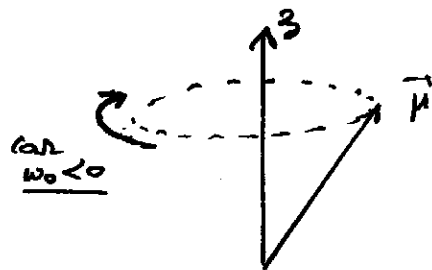
R' le référentiel en rotation uniforme autour de l'axe Oz
 tel que $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega}_0$.

Alors $\left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$

Mais $\left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right|_{R'} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$ (cf. Q19)

donc $\left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right|_{R'} = \vec{0}$: $\vec{\mu}$ est fixe dans R'

donc, vu dans R , $\vec{\mu}$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire ω_0 .



I.4)

Q23 - $\vec{M}$ selon $\vec{e}_z$ car somme de vecteurs portés par $\vec{e}_z$.

Q24 - $M_0 = N_+ \cdot \mu_p + N_- \cdot (-\mu_p)$

donc $M_0 = N \cdot \eta \cdot \mu_p$

Q25 - $\mu_p = \gamma_p \cdot \frac{\hbar}{2}$; $\eta = \frac{\mu_p B_0}{kT}$

donc $M_0 = N \cdot \frac{B_0}{kT} \cdot \left(\frac{\gamma_p \hbar}{2} \right)^2$

Q26 - $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{m} : \text{mole d'eau par unité de volume} \\ 2 \times 10^{23} \text{ atomes H par mole d'eau} \end{array} \right.$

donc $N = \frac{2 \times 10^{23} \cdot \rho}{m}$ noyaux H par unité volume. $N \approx 6,7 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

Q27 - sur son axe, $\theta = 0$ et le champ créé (5)
 s'écrit $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2\pi r^3}$; AN: $B = 6,4 \cdot 10^{-10} \text{ T} \ll B_0$

Q28 - ? La réponse semble se trouver dans le paragraphe qui suit...
 et dans le paragraphe d) du document 1. (Rms pulse)

Q29 - les éq. s'écrivent formellement :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} + \frac{\vec{M} - \vec{M}_0}{T_2} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0$$

ce qui est l'ED d'un système du 1^{er} ordre, de temps de relaxation T_2 , excité par un champ extérieur.

Dans les équations de Bloch, la modélisation de la relaxation est plus complexe car les phénomènes responsables de la relaxation parallèlement au champ ext. et perpendiculairement à celui-ci sont différents.

Ainsi, elles s'écrivent

$$\frac{d\vec{M}}{dt} + \underbrace{\frac{\vec{M}_{\parallel} - \vec{M}_{\parallel eq}}{T_2} + \frac{\vec{M}_{\perp} - \vec{M}_{\perp eq}}{T_1}}_{= \vec{C}_R(t)} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ici } \vec{M}_{\parallel eq} = 0 \\ \vec{M}_{\perp eq} = M_0 \hat{e}_z \end{array} \right)$$

Q30 -

Partie II

II.1)

Q31. Question mal posée. Par vide, on entend sans doute ici, absence de milieu matériel, mais pas absence de source.

Ainsi, les eq. de Maxwell sont :

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

qui, dans l'ARQS proposée, deviennent :

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

Q32. Soit S une surface de bord ∂S . Alors

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_s \quad \text{où} \quad i_s = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{est l'intensité traversant } S \text{ ("enlacée" par } \partial S \text{)}.$$

Q33. voir cours.

Q34. voir cours : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_0$

Q35. Par le théorème de superposition, on obtient :

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n (I_x \vec{e}_x + I_y \vec{e}_y)$$

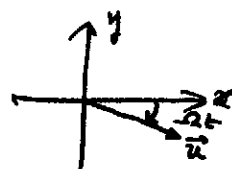
$$\text{soit } \vec{B}_1 = \mu_0 n I_0 \left(\cos(\Omega t) \vec{e}_x + \cos(\Omega t + \alpha) \vec{e}_y \right)$$

Ici, $\alpha = \pi/2$ donc

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n I_0 \left(\cos(\Omega t) \vec{e}_x - \sin(\Omega t) \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n I_0 \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \cos(\Omega t) \vec{e}_x - \sin(\Omega t) \vec{e}_y$$

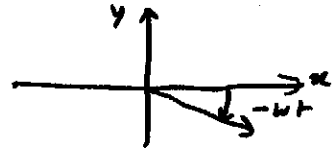
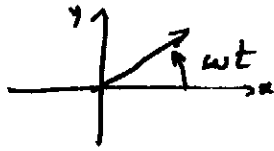
$\vec{u}$ tournant ; $\vec{u} = -\Omega \vec{e}_z$



Q36- $\vec{B}'_1 = 2B_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x$

$\vec{B}'_1 = 2B_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x + B_1 \sin(\omega t) \vec{e}_y - B_1 \sin(\omega t) \vec{e}_y$

$\vec{B}'_1 = B_1 \left(\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y \right) + B_1 \left(\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y \right)$



CAFD

II.2)

Q37- $\vec{j} = \frac{I_0}{a^2} \vec{e}_z$ car $\left(I_0 = \iint_{\text{cercle de rayon } a} \vec{j} \cdot d\vec{r} dz \vec{e}_z \text{ et } j \text{ uniforme.} \right)$

Q38- Par superposition,

$\vec{B} = \sum_{\substack{\text{nb couches} \\ N}} (\mu_0 n I_0) \vec{e}_z = N \mu_0 n I_0 \vec{e}_z$

Ici, $n = \frac{1}{a}$ et $N = \frac{R_2 - R_1}{a}$

donc $\vec{B} = \mu_0 \frac{R_2 - R_1}{a^2} \cdot I_0 \vec{e}_z$

L'énoncé suggère une nouvelle utilisation du théorème d'Ampère dans laquelle $(B_{int} - B_{ext})L = \mu_0 \iint_{R_2-R_1} \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$(B_{int} - 0) \cdot L = \mu_0 \cdot \frac{I_0}{a^2} \cdot L \cdot (R_2 - R_1)$

$B_{int} = \mu_0 \frac{I}{a^2} (R_2 - R_1)$

Q39- $I_0 = \frac{B \cdot a^2}{\mu_0 (R_2 - R_1)}$; AN : $I_0 \approx 16 \text{ A}$

Q40- λ s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{T}^{-1}$ c'est-à-dire $\text{H}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

Q41 - $\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}_\perp \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{et} \quad \vec{\nabla}_\perp \vec{j} = -\lambda \vec{B} \end{array} \right.$

8

donc $\vec{\nabla}_\perp \left(\frac{\vec{\nabla}_\perp \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\lambda \vec{B}$

donc $\underline{\underline{\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \lambda \vec{B}}} \quad (*)$

Q42 - $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \lambda}} ; \delta^2 \vec{\Delta} \vec{B} = \vec{B}$

Q43 - Invariances par translations parallèlement à (Oy) & (Oz)
donc $\frac{\partial}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial}{\partial z} = 0$

Q44 - (*) devient alors

$\forall i \in \{x; y; z\}, \quad B_i''(x) - \frac{B_i(x)}{\delta^2} = 0$

donc $B_i(x) = \lambda \cdot e^{x/\delta} + \mu \cdot e^{-x/\delta}$

Conditions aux limites: $\left| \begin{array}{l} x=0 \quad \text{continuité donc} \quad \left| \begin{array}{l} B_x(0) = 0 = B_y(0) \\ B_z(0) = B_0 \end{array} \right. \\ x \rightarrow -\infty : \text{pas de limite (!) mais la divergence du champ n'est pas physique: } \boxed{\mu=0} \end{array} \right.$

Ainsi, dans le supraconducteur,

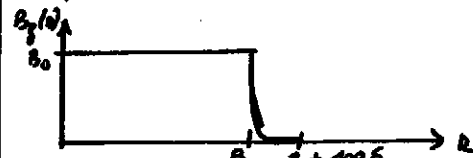
$\underline{\underline{\vec{B} = B_0 \cdot e^{x/\delta} \vec{e}_z}}$

Q45 - $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}_\perp \vec{B} \quad \text{donc} \quad \underline{\underline{\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{x/\delta} \vec{e}_y}}$

Q46 - δ est une "épaisseur de peau", profondeur typique de pénétration du champ.

Ici, $\delta \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$: champ "expulsé" ...

Q47-



III.1)

Q48- Il s'agit d'écrire des eq. de Bloch (en fait TNC) sans les termes de relaxation.

$$\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{R_0} = \gamma_p \vec{M} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_0)$$

Q49- $\vec{\omega}_{R_1/R_0} = -\omega \vec{e}_z$

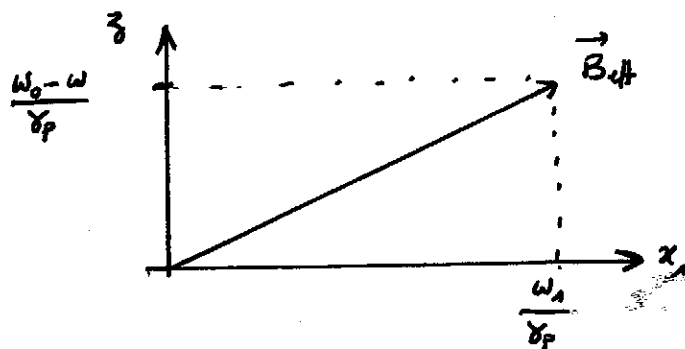
Q50- $\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_0) + \vec{\omega}_z \wedge \vec{M}$

Q51- $\gamma_p \vec{B}_1 = \omega_1 \vec{e}_{x_1} ; \gamma_p \vec{B}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$

donc

$$\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge \left[\underbrace{\frac{\omega_1 \vec{e}_{x_1}}{\gamma_p} + \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p} \vec{e}_z}_{\vec{B}_{eff}} \right]$$

Q52-



Q53- Dans R_1 , $\vec{M}$ tourne autour de $\vec{B}_{eff}$ avec une vitesse de rotation $-\gamma_p \vec{B}_{eff}$. (cf Q21-22).

Q54- à $t=0$, $\vec{M}$ selon $\vec{e}_z$ (équilibre thermique $M_x=0=M_y$: doc 1, b)

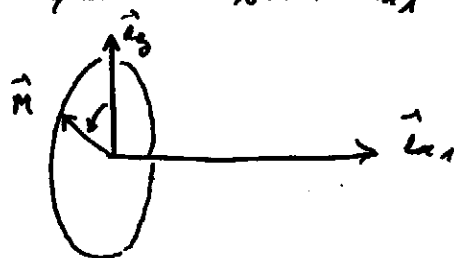
à qu'il se passe a été décrit à Q53 ...

Si B_1 est faible (devant $\frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p}$), $\vec{B}_{eff}$ est quasiment confondu avec $\vec{e}_z$ et la précession de $\vec{M}$ est "légère".

Q55 - $\Delta\omega \gg \omega_1$: cas B_1 faible, déjà discuté ...

(10)

$\Delta\omega \ll \omega_1$: $\vec{B}_{\text{eff}}$ quasiment selon $\vec{e}_{z_1}$



$\vec{M}$ précesse autour de $\vec{e}_{z_1}$: précision importante.

Q56 - La précision est d'amplitude maximale.

Q57 - $\vec{B}_{\text{eff}} = \frac{\omega_1}{\gamma_p} \vec{e}_{z_1}$

Q58 - Précision à $\vec{\Omega} = -\gamma_p \vec{B}_{\text{eff}}$ donc $\vec{\Omega} = -\omega_1 \vec{e}_{z_1}$.

Q59 - Dans B_1 , ce second champ n'est pas statique mais tourne à une vitesse angulaire $2\omega = 2\omega_0$.

Je ne vois pas comment montrer (ou simplement justifier) que l'effet de ce champ peut être négligé devant l'autre.

Sans doute qqc du type : si $\omega = \omega_0$, résonance vis-à-vis de $\vec{B}_1$ et "loin de la résonance" vis-à-vis de l'autre champ ...

Ceci suppose sans doute $\omega_1 \ll 2\omega_0$.

Q60 - la fréquence de résonance est $\omega = \gamma_p B_0$

Si B_0 devient $B_0 f(z)$ alors la fréquence de résonance devient $\omega = \gamma_p B_0 f(z)$ i.e. dépendante (un "peu") de la position.

Si B_1 est strictement monochromatique, seule l'aimantation en z tq $f(z) = 1$ entrera en résonance.

Si B_1 a un spectre étendu, un échantillon étendu pourra voir son aimantation résonner ...

Q61 - $\vec{M}$ est en précession autour de $\vec{e}_x$ (cf Q55 et suivants) (11)
à la vitesse angulaire ω_1 . (en valeur absolue).
Initialement $\vec{M}$ est parallèle à $\vec{B}_0$.

Donc $\omega_1 \cdot t_{p1} = \frac{\pi}{2} + p\pi$

ie $t_{p1} = \frac{\pi}{2\omega_1} + p \frac{\pi}{\omega_1} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2\omega_1}$

Q62 - De même, $\omega_1 t_{q2} = \pi + 2q\pi$

$t_{q2} = \frac{\pi}{\omega_1} + q \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \theta_2 = 2\theta_1$

Q63 - • précession autour de $\frac{\vec{B}_0}{\|\vec{B}_0\|} = \vec{e}_z$ à $-\gamma_p B_0 \vec{e}_z = -\omega_0 \vec{e}_z$
par rapport à R_0 .

Q64 - Elle serait fixe dans R_1 .

Q65 - ➔ À $t = \theta_2$, $\vec{M}$ est selon $-\vec{e}_y$. On est dans le cas
du document 1 paragraphe b). Retour à $\vec{M}$ aligné avec
le champ avec un temps caractéristique T_2 .

III-2)

Q66 - $\vec{M} = -M_0 \vec{e}_y$: composantes transversales non nulles dont on n'est
pas à l'équilibre thermique.

Q67 -

Plus envie ...