ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT–ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2015

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

PHYSIQUE I — MP.

ASPECTS DE LA PROPULSION SPATIALE

I. — Généralités

I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse

❏ **1** — Les quantités de mouvement de la fusée s'écrivent en projection sur (Oz) ascendant $\boxed{p_f(t) = m(t)v(t)}$ et $\boxed{p_f(t+dt) = [m(t) - D_m.dt]\,[v(t) + dv]}$, celle des gaz vaut

$$\boxed{p_g(t+dt) = D_m.dt\,[v(t) - u]}$$

❏ **2** — Par différence, la variation de quantité de mouvement du système total vaut au premier ordre $dp = p_f(t+dt) + p_g(t+dt) - p_f(t) = mdv - D_m dtu$. La deuxième loi de Newton s'écrit donc $\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} - D_m u = \Sigma F_{ext} = -mg$ soit $\boxed{m\frac{dv}{dt} = D_m u - mg}$.

❏ **3** — Il apparaît dans l'équation précédente une force de poussée orientée vers le haut $\boxed{F = D_m u}$. La fusée décolle si son accélération est positive, donc si $\boxed{D_m > \frac{mg}{u}}$.

❏ **4** — La poussée est équivalente au poids, donc $D_m u = mg$. Or au bout de la durée I_s, tout l'ergol a été consommé, donc on peut écrire $m = D_m I_S$. On en tire $\boxed{I_s = \frac{u}{g}}$.

❏ **5** — L'équation précédente peut s'écrire $dv = \frac{D_m u}{m}dt - gdt$ or par définition $D_m = -\frac{dm}{dt}$, donc $dv = -u\frac{dm}{m} - gdt$

Par intégration à partir d'une vitesse nulle à $t = 0$, il vient $\boxed{v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt}$.

❏ **6** — Sans le poids et par une intégration similaire, on aboutit à $\boxed{\Delta V = u\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)}$.

❏ **7** — Pour la fusée à deux étages, on trouve tout d'abord $\boxed{\Delta V_1 = u\ln\left(\frac{134}{34}\right) = 5,48\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$ puis $\boxed{\Delta V_2 = u\ln\left(\frac{24}{4}\right) = 7,16\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$. Soit au total $\Delta V = 12,6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ pour les deux étages. Pour la fusée à un étage, $\boxed{\Delta V = u\ln\left(\frac{134}{14}\right) = 9,03\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$. Du point de vue de la poussée, est donc préférable d'avoir plusieurs étages.

❏ **8** — On a $\Delta V = u \ln\left(\frac{m_u+m_c}{m_u}\right)$ donc$m_c = m_u\left(e^{\frac{\Delta V}{u}} - 1\right)$. On trouve $\boxed{m_{c_1} = 1,25\ \mathrm{t}}$, $\boxed{m_{c_2} = 142\,\mathrm{kg}}$. La propulsion ionique économise énormément de carburant.

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

❏ **9** — On a $\boxed{\mathrm{d}E_{c_{jet}} = \frac{1}{2}|\,\mathrm{d}m|(v-u)^2}$, donc $\boxed{P_{jet} = \frac{\mathrm{d}E_{c_{jet}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}D_m(v-u)^2}$. Par ailleurs, le vaisseau reçoit une puissance de la force de poussée $\boxed{P_v = Fv = D_m uv}$.

❏ **10** — Le rendement s'écrit $\eta(x) = \dfrac{P_v}{P_v + P_{jet}} = \dfrac{uv}{uv + \frac{(u-v)^2}{2}}$.

Soit après simplification, $\eta(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ avec $x = u/v$ (ou $x = v/u$).

❏ **11** — La dérivée s'écrit $\eta'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$, on trouve η maximal pour $x = 1$: les gaz sont éjectés avec une vitesse nulle dans le référentiel d'étude, toute l'énergie cinétique est dans le vaisseau ($\eta(1) = 1$). Inversement, η est nul si $x = 0$ ($v = 0$, toute l'énergie cinétique est dans le jet) ou $x = \infty$ ($u = 0$, gaz relachés sans vitesse relative). Pour x proche de 0 le comportement est linéaire $\eta(x) = 2x$, la décroissance vers 0 en $x \to \infty$ est assez lente (comme $1/x$). La courbe est représentée sur la figure 1.

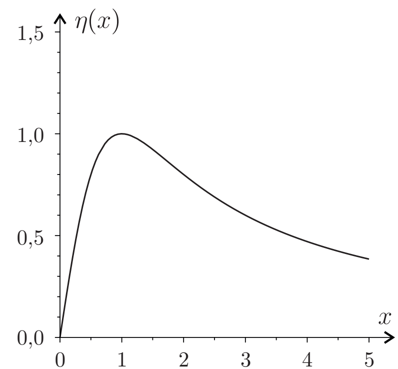

FIGURE 1 – Courbe $\eta(x)$