

I.

$$1) \quad \ddot{X} + 2\zeta\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{k}{m} ; 2\zeta\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \\ X = x - \tilde{z} ; \tilde{z} = l_0 - \frac{g}{\omega_0^2} \end{array} \right.$$

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur (pulsation des oscillations libres en l'absence de frottement).

ζ détermine le type de régime libre auquel sera sujet le système.

$0 < \zeta < 1$: régime pseudo-périodique

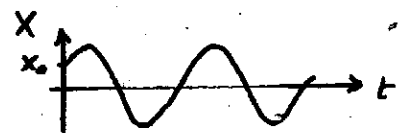
$\zeta = 1$: régime critique

$1 < \zeta$: régime apériodique.

Signalons également le lien entre ζ et le facteur de qualité Q du système :

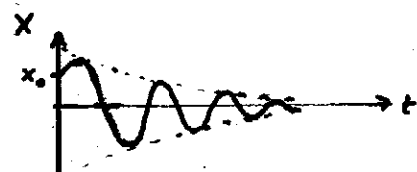
$$\underline{2\zeta.Q = 1}.$$

$$2) \quad \underline{\zeta = 0} : \quad X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$



$$0 < \underline{\zeta < 1} : \quad X(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0 + \zeta\omega_0 X_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$\text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$



Avec du vent, $2\zeta\omega_0 = \frac{\alpha - \beta}{m}$. Si $\beta > \alpha$, le système devient instable, l'amplitude des oscillations croît avec le temps...

$$3) \quad \ddot{X} + 2\zeta\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi f t)$$

donc

$$\underline{\ddot{Y} + 2\zeta\omega_0 \dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \omega = 2\pi f \\ Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \end{array} \right.$$

$$\underline{H = -\frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\zeta\Omega}}$$

$$4) (\Omega \mapsto |H|)'(\Omega) \geq 0 \Leftrightarrow \Omega^2 \leq 1 - 2\xi^2 \quad (2)$$

Donc, || si $1 - 2\xi^2 > 0$, une résonance existe. Elle se produit à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$

$$|H|(\omega_r) \underset{\xi^2 \ll 1}{\sim} \frac{1}{2\xi \cdot \omega_0^2} \quad (\text{tous calculs faits.})$$

$$5) \omega_r \underset{\xi^2 \ll 1}{\sim} \omega_0 : \text{on lit } \underline{\omega_0 \approx 12 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$$|H|(\omega_r) \underset{\xi^2 \ll 1}{\sim} \frac{1}{2\xi \omega_0^2} ; \text{on lit } 20 \log(\omega_0^4 |H|(\omega_r)) \approx 9 \text{ donc } \underline{\xi \approx 0,18} \quad \left(\xi^2 \approx 0,03 \text{ est bien } \ll 1 \right)$$

6) Une coïncidence entre les fréquences d'excitation et la fréquence de résonance peut conduire à de fortes amplitudes d'oscillation et mettre ainsi en péril la stabilité de l'ouvrage. Voilà pourquoi leur détermination est importante.

- 7) . capteur piézo-électrique fixé au sol.
 . accéléromètre placé près du centre de gravité du piéton.

8) ①, ② et ③ souffrent de repliement spectral. La marche étant un phénomène périodique, le spectre doit être un spectre de raies régulièrement espacées. Ce n'est le cas que de la courbe ④ sur laquelle on identifie un fondamental de fréquence 2 Hz environ. On constate que ce spectre est "convenablement" replié sur les courbes ①, ② et ③. Cette fréquence de 2 Hz est également lisible sur la figure 2 page 3 de l'énoncé.

9) On constate que $2\pi \times 2 \text{ Hz} \approx 12 \text{ rad.s}^{-1}$. Les piétons excitent le Millium Bridge pratiquement à la fréquence de résonance; d'où les problèmes rencontrés.

Un étage amortisseur additionnel résout le problème en modifiant l'aptitude du pont à résonner, notamment à la fréquence 2 Hz ...