

# Concours commun Mines–Ponts

Épreuve de Physique 2 — filière MP

Concours 2014

## I. — Un peu d'astrométrie

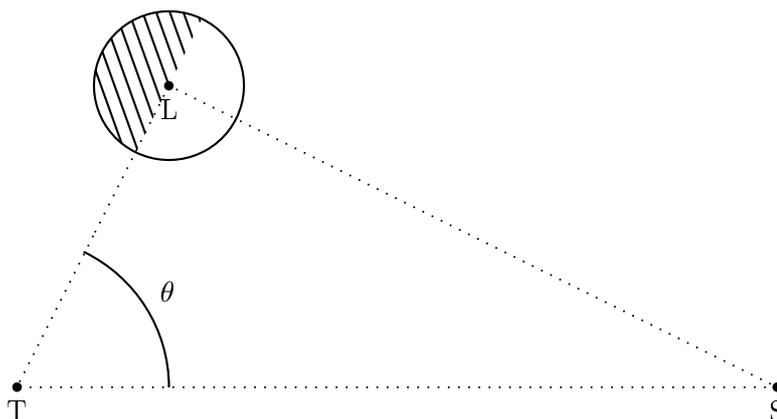
### I.A – Triangulation

1. – Dans un triangle, le quotient du sinus d'un angle sur la longueur opposée est un invariant ; on a donc

$$\frac{\sin \beta}{AC} = \frac{\sin(\pi - \alpha - \beta)}{a} \text{ donc } \boxed{AC = a \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}}.$$

### I.B – Le génial Aristarque

2. – La lune est observée à moitié éclairée dans le cas de la figure ci-dessous, donc pour  $\boxed{\lambda_{1/2} = \frac{\pi}{2}}$ .



3. – Ici encore,  $\frac{\sin \lambda}{TS} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{TL}$  donc  $\boxed{\frac{TS}{TL} = \frac{1}{\cos \theta} = 19,1}$ .

En fait, la valeur de  $\theta$  est ici sous évaluée, du fait d'une erreur de pointé de  $\theta$ , la valeur réelle est plus élevée ; il est difficile ici de choisir entre les valeurs proposées... Les valeurs de la littérature sont

$$TS = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m et } TL = 3,2 \cdot 10^8 \text{ m donc } \boxed{\frac{TS}{TL} \Big|_{\text{moderne}} = 460}.$$

4. – La possibilité d'éclipses totales de Lune impose  $\frac{r_L}{TL} = \frac{r_S}{TS}$  ; compte tenu que  $\frac{r_T}{r_L} \simeq 3$ , on en déduit

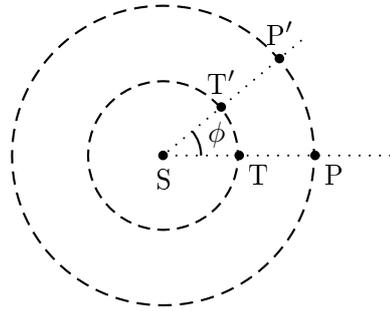
$\frac{r_S}{r_T} = \frac{TL}{TS} \frac{r_L}{r_T} > \frac{19}{3}$  donc  $\boxed{\frac{r_S}{r_T} > 6}$ . C'est donc, à son point de vue, la mouche (la Terre) qui tourne autour de la torche (le Soleil) et non le contraire. Les valeurs actuellement connues sont  $r_L = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$

et  $r_S = 7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$  donc  $\boxed{\frac{r_S}{r_T} \Big|_{\text{moderne}} = 1,1 \cdot 10^3}$ .

### I.C – Détermination des distances Soleil – Planètes

5. – L'angle cité par l'énoncé est noté  $\phi$  sur le schéma ci-après. Les positions T et P sont celles de la première conjonction, T' et P' celles de la conjonction suivante. La durée  $\tau_P$  est celle du parcours PP',

donc  $\tau_P = \frac{\phi}{2\pi} t_P$ . C'est aussi celle du parcours TT' plus un tour, donc  $\left(1 + \frac{\phi}{2\pi}\right) t_T = \tau_P$ . On élimine  $\phi$  entre ces relations pour trouver  $\frac{1}{t_P} = \frac{1}{t_T} - \frac{1}{\tau_P}$  donc aussi  $t_P = \frac{t_T \tau_P}{\tau_P - t_T}$ .



6. – Avec  $t_T = 365$  jours et  $\tau_m = 780$  jours, on trouve  $t_m = 686$  jours = 1,88 an.

7. – Le mouvement d'une planète autour du Soleil sur une trajectoire circulaire de rayon  $r_P$  vérifie le principe fondamental  $m_P \vec{a}_P = \vec{F}$  avec, en coordonnées polaires,  $\vec{a}_P = -\omega^2 r_P \hat{u}_r$  et  $\vec{F} = -\frac{GM_s m_P}{r_P^2} \hat{e}_r$ ;

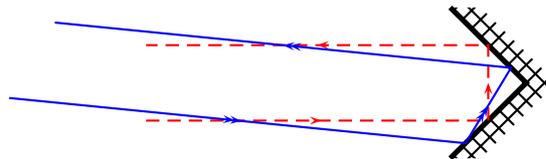
on en déduit la troisième loi de Kepler,  $\frac{r_P^3}{t_P^2} = \frac{GM_s}{4\pi^2}$ ; on fait ici l'hypothèse que le Soleil est immobile,

c'est-à-dire que  $M_s \gg m_P$ . Dans le système d'unités astronomiques,  $\frac{r_P^3}{t_P^2} = \frac{r_T^3}{t_T^2} = \frac{1 \text{ UA}^3}{1 \text{ an}^2}$ ; dans le cas

de Mars,  $r_m = \left(\frac{686}{365}\right)^{2/3} = 1,52 \text{ UA}$ .

## I.D – Télémétrie laser-lune

8. – À deux dimensions, un coin de cube est remplacé par deux miroirs formant un angle droit; quel que soit la direction du rayon incident, cette direction est, après deux réflexions, transformée en son opposé :



On peut le justifier simplement en choisissant un système d'axes tel que chacun des miroirs plans formant le coin de cube soit un des plans  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$  et  $(Oxz)$ . Une symétrie par rapport au plan  $(Oxy)$  change le vecteur directeur  $\hat{n} = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y + n_z \hat{e}_z$  de l'onde incidente en  $\hat{n}' = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y - n_z \hat{e}_z$ . Une seconde symétrie par rapport à  $(Oyz)$  change le signe de  $n_x$  et la dernière symétrie change enfin le signe de  $n_y$ , de sorte que le vecteur directeur de l'onde émergente est  $-\hat{n}$ .

9. – À l'aller, un cône de demi-angle au sommet  $\sigma_0$  intercepte, à la distance  $d_\ell$ , un cercle de rayon  $d_\ell \sigma_0$  dont l'aire est  $\pi d_\ell^2 \sigma_0^2$  et  $\rho_a = \frac{\Sigma_0}{\pi d_\ell^2 \sigma_0^2}$ . De même,  $\rho_r = \frac{\Sigma_1}{\pi d_\ell^2 \sigma_1^2}$  donc  $\rho_t = \frac{\Sigma_0 \Sigma_1}{\pi^2 d_\ell^4 \sigma_0^2 \sigma_1^2}$  où on doit convertir les

angles en radians,  $1'' = \frac{1}{60^2} \frac{\pi}{180} = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ ; il vient alors  $\rho_t = 2,6 \cdot 10^{-18}$  donc l'énergie reçue

en retour par chaque impulsion est  $\epsilon' = \rho \epsilon = 4,8 \text{ eV}$ ; si on compare cette valeur à l'énergie d'un

photon de cette longueur d'onde (mais il faut connaître les constantes  $h$  et  $c$ ),  $\epsilon_0 = \frac{hc}{\Lambda} = 2,37 \text{ eV}$ , cela veut dire qu'il faut collecter et mesurer le temps de vol de... deux photons à chaque fois, à repérer parmi tous ceux qui proviennent de cette région de la Lune.

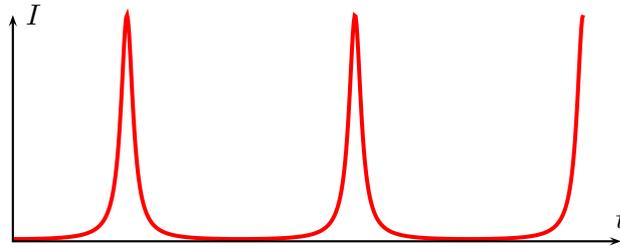
## II. — Utilisation d'un proximètre laser

### II.A – Mesure de petites distances

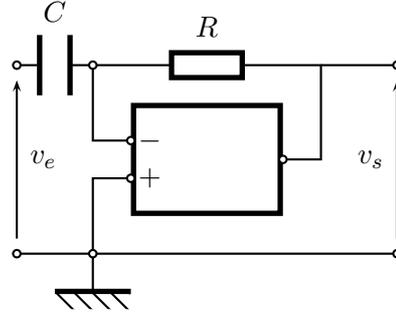
10. – Les conditions de Gauss imposent un petit angle entre l'axe optique et les faisceaux, donc  $|\theta - \varphi| \ll \pi$ .  
L'image  $P'$  de  $P$  se forme dans le plan focal si la distance  $O_1P$  est grande devant  $f$ , soit  $\frac{h}{\cos \varphi} \gg f$  ;  
comme  $\varphi$  est proche de  $\theta = \frac{\pi}{4}$  cette condition s'écrit aussi  $h \gg f$ .
11. – Assimilant les petits angles et leurs tangentes, le triangle  $O_1O_2P'$  fournit  $\frac{y}{f} = \theta - \varphi$  et  $O_1OP$  fournit  $\tan \varphi = \frac{H}{h}$  (cet angle-là est proche de  $\pi/4$ ). On en déduit  $H = h \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{y}{f} \right)$  qu'on doit développer au premier ordre en  $y/f$  pour rester cohérent avec les calculs précédents. Avec  $\tan \left( \frac{\pi}{4} - \epsilon \right) = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\epsilon}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 1 - 2\epsilon$ , il vient  $H = h \left( 1 - 2\frac{y}{f} \right)$  donc ici  $H = 0,92 \text{ m}$ .
12. – De  $\theta - \varphi = \frac{y}{f}$  on tire  $\delta\varphi = \frac{\delta y}{f}$  (on assimile les imprécisions à des valeurs absolues de différentielles) tandis que  $H = h \tan(\theta - \varphi)$  fournit  $\delta H = h \delta\varphi [1 + \tan^2(\theta - \varphi)]$  qu'on écrit encore  $\delta H = \frac{d}{f} h \left( 1 + \frac{H^2}{h^2} \right)$ . L'imprécision relative s'écrit alors  $\frac{\delta H}{H} = \frac{d}{f} \left( x + \frac{1}{x} \right)$  où  $x = \frac{h}{H}$ . La fonction  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  est minimale quand  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$  s'annule, donc quand  $h = H$ , ce qui justifie le choix  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ; on a alors  $\left. \frac{\delta H}{H} \right|_{\min} = 2\frac{d}{f} = 8 \cdot 10^{-4}$ .
13. – C'est le phénomène de diffraction qui explique cette divergence ; il y a diffraction par le bord (circulaire) du laser, donc l'angle de divergence peut être assimilé au rayon angulaire de la tache d'Airy,  $\alpha_d = 0,61 \frac{\lambda}{r}$ .
14. – Ici,  $d' = 2\alpha_d f$  est le diamètre de la tache d'Airy dans le plan focal de la lentille, soit  $d' = 1,22 \frac{\lambda}{r} f$  ; on trouve  $d' = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  soit  $d' \sim d$  : les deux causes d'erreur de mesure (diffraction et largeur des pixels) sont comparables, ce qui correspond à un choix raisonnable pour une chaîne de mesure, dans laquelle il est inutile d'incorporer un élément beaucoup plus précis que les autres.

### II.B – Mesure de grandes distances

15. – L'angle  $MOO_1$  vaut toujours  $\frac{\pi}{4}$  donc l'angle d'incidence du faisceau sur le miroir est  $i = \frac{\pi}{4} - \alpha$  ; on en déduit l'angle d'émergence  $i = \alpha + \psi$ , donc  $\psi + 2\alpha = \frac{\pi}{4}$ .
16. – La relation  $H = h \tan \psi$  montre que le point  $P$  n'est atteint par le faisceau laser que lorsque  $\psi(t)$  passe par la valeur particulière  $\psi_0 = \arctan \frac{H}{h}$ . Mesurer  $H$  correspond donc à une mesure de la durée écoulée entre le début d'un balayage ( $t \equiv 0[2p]$ ) et l'arrivée d'un spot sur le détecteur.
17. – En fait, la largeur finie du détecteur montre que le faisceau lumineux éclairera celui-ci pour des valeurs de  $\psi$  légèrement différentes de  $\psi_0$  ; on observera donc une suite d'impulsions de période  $2p$ , dont la largeur dépend de la largeur des pixels utilisés au foyer du capteur (page suivante).



18. – On repère les variations rapides du signal au moyen du dérivateur. On peut proposer le montage ci-dessous :



La réaction à la borne – permet le fonctionnement en régime linéaire ; on peut alors écrire le théorème de Millman à la borne – de l'amplificateur, supposé idéal ( $i_- = 0$ ) en de gain infini ( $v_- = v_+ = 0$ )

sous la forme  $0 = \bar{v}_e jC\omega + \frac{\bar{v}_e}{R}$  soit encore  $\bar{v}_s = -jRC\omega\bar{v}_e$  ou  $v_s(t) = -RC \frac{dv_e}{dt}$ .

On notera qu'un tel montage risque de saturer dès que des composantes (bruit, etc.) de haute fréquence seront appliquées à l'entrée. On peut l'améliorer et remplaçant le condensateur par la mise en série du condensateur et d'une résistance  $R'$ , conduisant à la fonction de transfert d'un filtre passe-haut,  $\bar{H} = \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_e} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR'C\omega}$ . Ce circuit est alors bien dérivateur pour toutes les pulsations vérifiant  $\omega \ll \frac{1}{R'C}$  et il suffit de choisir cette pulsation assez élevée (donc  $R'$  assez faible) pour dériver pratiquement tout signal sans risquer la saturation.

### III. — Diffusion thermique ; interaction laser–matière

#### III.A – Équation de diffusion

19. – Considérons le système formé du matériau conducteur entre  $x$  et  $x + dx$ , délimité par une surface  $S$  donc de volume  $Sdx$ , de masse  $dm = \rho Sdx$  et de capacité thermique  $dC = cdm$ . Le premier principe appliqué à une évolution infinitésimale de durée  $\delta t$  de ce système s'écrit  $dU = \delta W + \delta Q$  où  $\Delta W = 0$  (système immobile),  $dU = dC \frac{\partial T}{\partial t} \delta t$  et  $\delta Q = [j_Q(x, t)S - j_Q(x + dx, t)S] \delta t$ . On en déduit l'équation de bilan thermique  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}$ . Remplaçant dans celle ci  $j_Q$  par l'expression  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  tirée de la

loi de Fourier dans ce problème unidimensionnel, il vient  $\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ . Si on dérive une nouvelle fois cette équation par rapport à  $x$ , et en remarquant que  $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ , on obtient de même

$$\frac{\partial j_Q}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 j_Q}{\partial x^2}.$$

Pour vérifier que les fonctions proposées sont bien des solutions de l'équation, on recopie la solution proposée sous la forme  $\theta(x, t) = \theta_0 + \frac{b}{\sqrt{\mu}} f(x, t)$  où  $f(x, t) = t^{-1/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2 x^2}{\mu t}\right)$  et on va montrer que

$f(x, t)$  est solution de l'équation de diffusion. On calcule alors  $\frac{\partial f}{\partial t} = t^{-3/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2 x^2}{\mu t}\right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2 x^2}{\mu t}\right]$  tandis que  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \frac{\kappa^2 x}{\mu t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\kappa^2 x^2}{\mu t}\right)$  donc aussi  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \frac{\kappa^2}{\mu t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\kappa^2 x^2}{\mu t}\right) \left[1 - 2 \frac{\kappa^2 x^2}{\mu t}\right]$ .

L'identification des deux termes, considérés comme des polynômes en  $x$ , impose alors  $\kappa^2 = \frac{1}{4}$  ; on peut sans perdre de généralité imposer  $\kappa > 0$  donc  $\kappa = \frac{1}{2}$ .

### III.B – Flux thermique constant

20. – On cherche une solution  $j_Q(x, t)$  vérifiant  $j_Q(0, t) = j_0$  constant, ce n'est pas le cas de  $\theta(x, t)$  ni en tant que solution  $j_Q(x, t)$  (car  $\theta(0, t) = b/\sqrt{\mu t}$ , qui n'est pas constant) ni en tant que solution  $T(x, t)$  (car sa dérivée  $\partial\theta/\partial x$  dépend aussi de  $t$  en  $x = 0$ ). Cette solution ne convient pas.

21. –  $j_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  s'écrit aussi  $j_Q(x, t) = -2B_1 \sqrt{\mu t} \frac{dF}{du} \frac{\partial u}{\partial x}$ , avec  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\mu t}}$  ; on en déduit donc l'expression  $j_Q(x, t) = -B_1 \frac{dF}{du}$  avec par ailleurs  $\frac{dF}{du} = -\frac{2u}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - \operatorname{erfc}(u) + u \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$  qui s'écrit après simplification  $\frac{dF}{du} = -\operatorname{erfc}(u)$  et  $j_Q(x, t) = B_1 \operatorname{erfc}(u)$ .

22. – Les conditions aux limites spatiales pour  $j_Q$  sont  $j_Q(0^+, t) = j_0$  donc  $B_1 = j_0$  car  $\operatorname{erfc}(0) = 1$ , et  $\lim_{x \rightarrow \infty} j_Q(x, t) = 0$  car à grande distance de la source de chaleur la température reste uniforme. Comme l'exponentielle l'emporte sur les puissances dans l'expression asymptotique proposée,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(u) = 0$  et cette limite n'impose pas d'autre conséquence.

Les conditions aux limites spatiales pour  $T$  sont  $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0$  ; on vérifie alors facilement que  $u \operatorname{erfc}(u) \rightarrow 0$  (toujours à cause de la comparaison entre puissances et exponentielles) si  $u \rightarrow \infty$  donc  $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = 0$ , ce qui permet de déterminer  $A_1 = T_0$ .

Les conditions initiales ( $t \rightarrow 0$ ) pour  $j_Q(x, t)$  et  $T(x, t)$  fournissent  $j_Q(x, 0) = 0$  et  $T(x, 0) = T_0$  pour  $x > 0$  (le chauffage n'a pas encore commencé) et n'apportent pas de renseignement supplémentaire ; les valeurs limites (pour  $t \rightarrow \infty$  donc  $u \rightarrow 0$ ) donnent  $F(u) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} - u$  donc  $T(x, t) \sim_{t \rightarrow \infty} T_{\text{surf}}(t) - \frac{j_0 x}{\lambda}$

avec pour température de surface  $T_{\text{surf}}(t) - T_0 = \frac{2j_0 \sqrt{\mu t}}{\lambda \sqrt{\pi}}$  donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = +\infty$  : le chauffage se poursuivant indéfiniment, il n'y a pas de limite à l'augmentation de la température si on ne prend pas en compte d'autres phénomènes. Enfin, comme  $\operatorname{erfc}(0) = 1$  on a encore  $\lim_{t \rightarrow \infty} j_Q(x, t) = j_0$ , qui est évidemment compatible avec l'expression précédente de  $T$ .

### III.C – Température constante

23. – Pour  $x \rightarrow 0$  ou  $t \rightarrow \infty$  donc  $u \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{erfc}(0) = 1$  donc  $T(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = T_1$  (le système évolue vers un état limite d'équilibre isotherme) impose  $A_2 + B_2 = T_1$ . Pour  $x \rightarrow \infty$  ou  $t \rightarrow 0$  donc  $u \rightarrow \infty$ , le chauffage n'a pas commencé et  $T(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0$  impose  $A_2 = T_0$  puisque  $\lim_{u \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(u) = 0$  ; on en déduit enfin  $B_2 = T_1 - T_0$ .

24. –  $j_Q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda B_2 \frac{d \operatorname{erfc}(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x}$  soit  $j_Q(x, t) = \lambda \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\pi \mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}$ . Le courant thermique calculé ici est proportionnel à l'écart de température entre la valeur  $T_1$  imposée en surface et la valeur initialement uniforme  $T_0$  du matériau conducteur, ce qui était prévisible ; il est infini à l'instant du contact à cause de la différence finie de température imposée sur une distance nulle, c'est une conséquence normale du modèle choisi. Enfin, le système s'homogénéise et le courant thermique s'annule au bout d'une durée qui est celle des variations de l'exponentielle, soit  $t \sim x^2/\mu$ , ce qui est aussi le résultat ordinaire de l'étude des phénomènes de conduction thermique.

### III.D – Modélisation d’une opération de perçage

25. – On a vu que  $T_{\text{surf}}(t) - T_0 = \frac{2j_0\sqrt{\mu t}}{\lambda\sqrt{\pi}}$  où  $j_0 = \frac{P_\ell}{\sigma}$  donc on peut en déduire l’instant de la fusion de

surface,  $t_f = \frac{\pi\lambda^2(T_f - T_0)^2\sigma^2}{4P_\ell^2\mu}$  ou, numériquement,  $t_f = 63 \text{ ms}$ .

26. – Considérons une tranche de matériau de surface  $S$  comprise entre  $x = 0$  (limite entre les zones fondue et solide) et  $x = v\delta t$ ; cette zone est donc solide à l’instant  $t$  et fondue à l’instant  $t + \delta t$ . Le liquide étant transparent au laser, la puissance thermique parvenant sur cette surface est  $j_0S$ ; celle qui est évacuée par conduction vers le reste (solide) du matériau est  $-\lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=v\delta t}$ . Le transfert thermique

reçu par cette tranche pendant la durée  $\delta t$  de sa fusion est donc  $\delta Q = S \left[ j_0 + \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=v\delta t} \right] \delta t$  d’une part,  $\delta Q = dH = \rho L_f S v \delta t$  d’autre part. En égalant les deux expressions en en faisant  $\delta t \rightarrow 0$ , il vient

donc  $\vec{v} = \frac{j_0 + \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \hat{u}_x}{\rho L_f}$ .

27. – L’équation de diffusion thermique pour  $T(x', t)$  ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de  $x' = x - vt$ . On a donc  $T(x, t) = f(x - vt)$  où la fonction  $f$  permet de déterminer  $\frac{\partial T}{\partial x} = f'$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f''$  et  $\frac{\partial T}{\partial t} = -vf'$ . L’équation de diffusion thermique  $\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  s’écrit donc  $-vf' = \mu f''$  qu’on écrira

$\frac{dT}{dx} = -\gamma \frac{d^2T}{dx^2}$  dans le référentiel où cette température est stationnaire, avec  $\gamma = \frac{\mu}{v}$ .

28. – L’équation différentielle est linéaire à coefficients constants avec l’équation caractéristique  $r = -\gamma r^2$  dont les racines sont  $r = 0$  et  $r = -1/\gamma$ , d’où la solution  $T(x) = a + be^{-x/\gamma}$ , avec  $T(0) = T_f = a + b$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = T_0 = a$  donc  $T(x) = T_0 + (T_f - T_0)e^{-\frac{vx}{\mu}}$ .

29. – On calcule alors  $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{v}{\mu}(T_f - T_0)$  donc  $v = \frac{P_\ell}{\rho\sigma [L_f + c(T_f - T_0)]}$  soit enfin  $v = 4,8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .