4 Une application moderne de l'effet Sagnac : le gyromètre à fibre

4.1 Principe de fonctionnement et modulation de phase

24. On a $L = 2\pi r N_t$, ce qui donne :
$\Delta\Phi_s = \frac{4\pi}{c}\frac{2n\pi r^2\Omega}{\lambda_0}$, soit :
$\boxed{\Delta\Phi_s = \frac{8\pi S_{tot}\Omega}{c\lambda_0}}$.
Note : Dans la partie précédente, on obtenait avec le calcul demandé par l'énoncé $\Delta\Phi_s = \frac{4\pi S_{tot}\Omega}{c\lambda_0}$, soit deux fois moins. Ce facteur 2 est cohérent avec la mesure expérimentale de l'effet Sagnac, ainsi qu'avec le calcul correct après correction de l'erreur d'énoncé.

25. On a alors une interférence entre deux ondes d'intensité $I_0/4$ (puisqu'elles sont passées deux fois dans la séparatrice). On obtient :
$\boxed{I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos\Delta\Phi_s)}$.
Rq : Dans ce cas, contrairement au Michelson classique, chaque rayon a subi une transmission et une réflexion, le déphasage apporté par la lame est donc identique pour chacun d'entre eux.

26. (a) I est indépendant du signe de $\Delta\Phi_s$, donc du signe de Ω. On ne peut donc pas discriminer.
    (b) $\kappa = \frac{I_0}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\Delta\Phi}{\mathrm{d}\Omega}\sin(\Delta\Phi)\right|$, soit :
    $\boxed{\kappa = \frac{4\pi S_{tot} I_0}{c\lambda_0}\left|\sin\frac{8\pi S_{tot}\Omega}{c\lambda_0}\right|}$.
    Pour augmenter la sensibilité, on peut augmenter S_{tot} (en particulier via le nombre de tours), et I_0. On peut en principe jouer sur la longueur d'onde du laser mais de façon beaucoup plus limitée.
    (c) La sensibilité tend vers 0 pour de faibles vitesses de rotation (le signal est proportionnel à Ω^2).

27. (a) Il suffit de calculer $\Phi_b(t) - \Phi_b(t-\tau_r) = \Phi_0\cos(2\pi f t) - \Phi_0\cos(2\pi f(t-\tau_r))$. La formule trigonométrique appropriée donne alors le résultat demandé.
    (b) On peut prendre $f_m\tau_r = \frac{1}{2}$. On obtient alors : $\Delta\Phi_t = \Delta\Phi_s - 2\Phi_0\sin\left(2\pi f_m t - \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui donne le résultat demandé avec $\boxed{\Phi_{eff} = 2\Phi_0}$. La relation entre les fréquences peut s'écrire $\boxed{f_m = f_p}$.
    Note : on peut de façon plus générale prendre $f_m\tau_r = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, et obtenir le même résultat. On aurait alors $f_m = (2n+1)f_p$.

28. $I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\left(\Delta\Phi_s + \Phi_{eff}\cos(2\pi f_m t)\right)$. La relation trigonométrique de $\cos(a+b)$ donne alors directement le résultat.

4.2 Analyse harmonique

29. On a, en se limitant aux trois premiers termes de la série de Fourier :
$\cos\left(\Phi_{eff}\cos(2\pi f_m t)\right) = J_0(\Phi_{eff}) - 2J_2(\Phi_{eff})\cos(4\pi f_m t)$, et
$\sin\left(\Phi_{eff}\cos(2\pi f_m t)\right) = 2J_1(\Phi_{eff})\cos(2\pi f_m t)$.
On en déduit donc :
$\boxed{i_0 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\Delta\Phi_s J_0(\Phi_{eff})}$;
$\boxed{i_1 = -I_0\sin(\Delta\Phi_s)J_1(\Phi_{eff})}$;
$\boxed{i_2 = -I_0\cos(\Delta\Phi_s)J_2(\Phi_{eff})}$.

30. (a) $i_1 = 0$ en l'absence de rotation ($\Delta\Phi_s = 0$).
    (b) i_1 dépend du signe de $\Delta\Phi_s$, et $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}\Phi_s}$ ne s'annule pas quand Φ_s tend vers 0 : cela résout les deux problèmes cités.

31. En utilisant $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, on obtient :
$p(t) = KK_p i_0 s_0\cos(2\pi f_m t) + \frac{KK_p s_0 i_1}{2} + \frac{KK_p s_0 i_1}{2}\cos(4\pi f_m t) + \frac{KK_p s_0 i_2}{2}\cos(2\pi f_m t) + \frac{KK_p s_0 i_2}{2}\cos(6\pi f_m t)$, soit :
$\boxed{p_0 = \frac{KK_p s_0 i_1}{2},\ p_1 = \frac{KK_p s_0(i_2 + 2i_0)}{2},\ p_2 = \frac{KK_p s_0 i_1}{2},\ p_3 = \frac{KK_p s_0 i_2}{2}}$.

32. La cellule RC est un passe-bas : l'objectif est de conserver exclusivement la composante continue, proportionnelle à i_1, et d'éliminer toutes les composantes variables. La fréquence de coupure d'un tel filtre est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$; on doit donc avoir $f_c \ll 2f_m$, soit $\tau \gg \frac{1}{4\pi f_m}$.
   Pour la valeur numérique il faut relier ceci aux caractéristiques de la fibre :
   $\tau \gg \frac{1}{4\pi f_p} = \frac{nL}{2\pi c} = \frac{nN_t r}{c}$.
   Avec les valeurs numériques de la question suivante, sachant que l'indice est de toute façon d'ordre 1, on a :
   $\tau \gg 10^{-5}$ s.
   Prendre $\tau = 1$ ms permet d'avoir une bonne marge de sécurité et est facilement réalisable avec des composants usuels.

33. On a $\sin\Delta\Phi_s = \frac{-2u}{K_p K I_0 s_0 J_1(\Phi_{eff})} = 0,517$
   (la valeur de $J_1(\Phi_{eff}) = 0,58$ grâce au graphe).
   On obtient alors $\Delta\Phi_s = 0,544$ rad (ce qui n'est pas forcément très cohérent avec l'hypothèse $\frac{S_{tot}\Omega}{\lambda_0 c} \ll 1$...)
   On en déduit $\boxed{\Omega = \frac{c\lambda_0\Delta\Phi_s}{8\pi S_{tot}} = 8,47.10^{-3}\ \text{rad.s}^{-1}}$.
   On est bien en mesure de mesurer de très petites rotations !

4.3 Simulation informatique

34. (a) On a $p(t) = Ri + u = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$.
   Donc : $\boxed{p(t) = \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u}$.
   (b) $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}(p(t) - u(t))}$.
   (c) On a directement $\boxed{u_{n+1} - u_n = \Psi_n}$.

35. $\Psi_n = hf(p_n, u_n)$. On a alors $\boxed{u_{n+1} = u_n + hf(p_n, u_n)}$. Il s'agit de la méthode d'Euler.

36. $\Psi_n = \frac{h}{2}\left(f(p_n, u_n) + f(p_{n+1}, u_{n+1})\right)$.
   Si on évalue dans un premier temps u_{n+1} à l'aide de la méthode d'Euler, on a alors $u_{n+1} = u_n + rh$.
   En remplaçant dans $f(p_{n+1}, u_{n+1})$ on obtient la relation demandée.

37. Ligne 32 : `return (x - y)/tau`
   Ligne 44 :
   ```
   for n in range(N):
       T = n*h
   ```
   Ligne 49 : `P = [p(tn) for tn in T]`
   Ligne 53 :
   ```
   for n in range(N-1):
       U.append(U[n]+h*f(P[n],U[n]))}
   ```
   (on peut a priori faire un `range(N)` sans bug, mais cela génère une liste de longueur $N+1$.
   Ligne 65 :
   ```
   for n in range(N-1):
       r = f(P[n],U[n])
       U.append(U[n]+(h/2)*(r+f(P[n+1],U[n]+r*h)))
   ```

38. (a) La valeur de Φ_{eff} joue sur $J_1(\Phi_{eff})$, et donc sur le signe du u moyen. En particulier, $J_1(1,8\ \text{rad}) > 0$; $J_1(3,8\ \text{rad}) \simeq 0$ et $J_1(5,4\ \text{rad}) < 0$. Cela permet d'identifier 4 :e et 5 :d.
   L'influence de τ concerne à la fois la qualité du filtrage (qui sera d'autant plus bon que τ est grand) et la durée du régime transitoire (d'autant plus grand que τ est grand). On peut donc identifier : 1 :c ; 2 :b ; 3 :a.
   (b) La valeur $3,8$ rad est à éviter car c'est un zéro de J_1 : la sortie sera donc nulle, on ne pourra pas détecter quoique ce soit.
   (c) Une grande valeur de τ permet un bon filtrage, mais implique un régime transitoire plus long.
   (d) La valeur de u sera multiplié par $J(5,4\ \text{rad})/J(1,8\ \text{rad})$, soit $-0,36/0,58$, ce sera donc également le cas de la valeur de $\sin(\Delta\Phi_s)$: on obtient
   $\sin(\Delta\Phi_s) = -0,32$ et $\Delta\Phi_s = -0,33$ rad.