B Le piège de Paul

B I Préliminaires

B.I.1) Trois possibilités parmi d'autres

- Force de pesanteur (Poids) :

  $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ associée à l'énergie potentielle $E_p = mgz + cte$
- Force de gravitation (attraction gravitationnelle) :

  $\vec{F} = -\frac{Gmm'}{r^2}\,\vec{e}_r$ associée à l'énergie potentielle $E_p = -\frac{Gmm'}{r}$
- Force de rappel élastique (modèle du ressort) :

  $\vec{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\vec{e}_T = -k\,x\,\vec{e}_x$ associée à l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}\,kx^2 + Cte$

B.I.2) Objectif : réalisation d'un oscillateur harmonique (possibilités de modèles simplifiés multiples, mais une réalité délicate.

- Mouvement d'une bille glissant sans frottement dans un creux. Si la forme du bol est continue, l'oscillateur est au premier ordre harmonique
- Masse liée par ressort et glissant/oscillant sans frottement.
- Circuit LC idéalisé avec un état initial énergétique non nul. Etc…

En pratique l'oscillateur harmonique pur n'est pas réalisable sans un système de rétro-action et de régulation destiné à compenser les pertes et à éviter les dérives. Le processus n'est donc pas aussi simple qu'il y parait.

B II Etude d'un mouvement unidimensionnel

B.II.1)

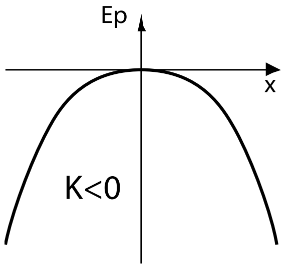
- Axe rectiligne, vecteur de base invariant, paramètre x classique de type cartésien.
  Nous utilisons la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -2Kx\,\vec{e}_x$.
- Le système (masse ponctuelle) n'est soumis qu'à cette seule force, le PFD nous donne l'équation différentielle dynamique : $m\ddot{x} = -2Kx$

B.II.2) Oscillateur harmonique

- C'est un oscillateur harmonique dont la réponse sera du type $x(t) = X_0\,cos\,(\Omega t + \phi)$ ou $\Omega^2 = \frac{2K}{m}$ et X_0, Φ dépendent des conditions initiales.
- $x = 0$ est une position d'équilibre stable car c'est le minimum d'énergie potentielle du système.

B.II.3) Système hyperbolique

- Nous avons une figuration potentielle correspondant à une parabole dont le coefficient du monôme de degré 2 est négatif :

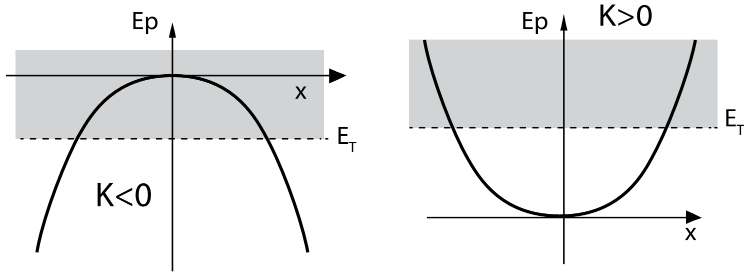


- $x = 0$ est une position d'équilibre instable car c'est le maximum d'énergie potentielle du système.

B.II.3) Piégé ou libre ?

- Supposons le système hors de sa position d'équilibre, il possède à l'instant initial une énergie totaleE_T. L'énergie se conserve et vérifie $E_T = E_p + E_c$, avec $E_c \geq 0$, soit $E_T \geq E_p$. Les positions accessibles pour M sur le diagramme potentiel se trouvent donc toutes en dessous du seuil d'énergie définie par E_T.

Les remarques sont à faire à l'adresse suivante : christophe.caire@prepas.org



- Nous avons :
  Les zones accessibles se trouvent hors de la zone grisée, soit x_0>0 la valeur telle que $E_T = E_p(x_0)$, pour K>0 la particule est libre d'évoluer entre deux valeurs symétriques $[-x_0, x_0]$, pour K<0, la particule est libre d'évoluer soit sur la plage $]-\infty, -x_0]$, ou sur la plage $[x_0, \infty[$. Dans le cas K>0 le mouvement est borné, la particule est piégée, pour K<0 la particule n'est pas confinée, elle est libre.

B III Etude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

B.III.1)

- L'énergie potentielle de la particule s'écrit $E_p = \Phi_0(a(x^2+y^2) + b\, z^2)$.
  L'analyse du gradient nous fournit la force $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p = -\Phi_0\left[a\left(x\, \vec{e}_x + y\, \vec{e}_y\right) + b\, z\, \vec{e}_z\right]$.
- L'identification de l'expression définie dans l'énoncé nous fournit $K_x = K_y = \Phi_0 a$ et $K_z = \Phi_0 b$.

B.III.2)

- Le PFD se transcrit sous la forme $\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{K_x}{m}\, x \\ \ddot{y} = -\frac{K_y}{m}\, y \\ \ddot{z} = -\frac{K_z}{m}\, z \end{cases}$
  Le comportement de la particule va être dépendant des signes de K_i.

B.III.3)

- Equation aux dimensions :$[a] = [b] = \left[\frac{E_p}{\Phi_0 x^2}\right] = \frac{[Energie]}{MT^{-2}L^2} = \frac{[Force][Deplacement]}{MT^{-2}L^2} = \frac{MT^{-2}L^2}{MT^{-2}L^2} = Sans\ dimension$

B.III.4)

- En l'absence de charge distribuée dans le vide nous avons l'équation locale de Maxwell-Gauss qui vérifie$div\, \vec{E} = \frac{\Phi_0}{q}\, [a + a + b] = 0$.
  Avec $2a + b = 0$, nous constatons que les signes de a et b sont forcément opposés.
  Il n'est donc pas possible d'avoir des solutions de piégeage sur chaque axe.
  Vu la forme nous prendrons a>0 (piège selon x et y), et b<0 (dérive hyperbolique selon z).

B IV Etude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel : piégeage.

B.IV.1)

- Wolfang Paul contourne la difficulté précédente en imposant $\Phi(\mathrm{t}) = \Phi_0 \cos(\Omega t)$.
  Nous avons d'après l'énoncé l'énergie potentielle « effective » (terme non défini pour les étudiants) : $E_{p,eff} = \frac{m\omega_0^4}{16\Omega^2}(x^2 + y^2 + 4\, z^2)$.
  Nous déterminons la force et écrivons le PFD pour obtenir : $\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}\, x \\ \ddot{y} = -\frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}\, y. \\ \ddot{z} = -\frac{\omega_0^4}{2\Omega^2}\, z \end{cases}$

B.IV.2)

- Nous sommes en présence d'un oscillateur spatial, le point O est le minimum d'énergie potentiel du système. Soit E_T l'énergie initiale du système, les forces dérivant d'une énergie potentielle, elle se conserve et on a $E_T \geq E_p$. La position de M est bornée par :
  $$|x| < x_{max}, |y| < x_{max}\ et\ |z| < \frac{x_{max}}{2} \text{ avec } x_{max} = \frac{4\Omega}{\omega_0^2}\sqrt{\frac{E_T}{m}}.$$
- Les pulsations d'oscillations s'identifient à l'aide du PFD. $\omega_x = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega}, \omega_y = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega}\ et\ \omega_z = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega}$

B.IV.3)

Les remarques sont à faire à l'adresse suivante : christophe.caire@prepas.org

- Nous résolvons le système différentiel du PFD avec les conditions initiales fournies par l'énoncé : $x(0) = y(0) = z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = v_0 \ et\ \dot{y}(0) = 0$.

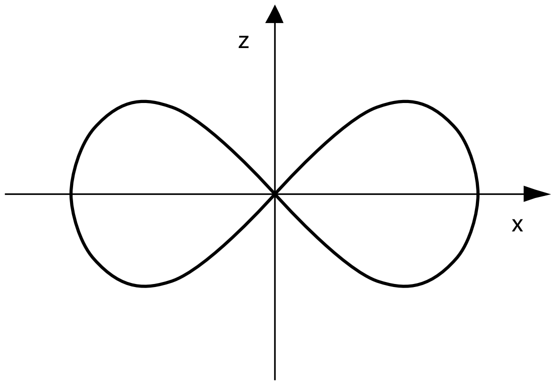
  Nous obtenons : $\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_x} sin(\omega_x t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{v_0}{\omega_z} sin(\omega_z t) \end{cases}$

B.IV.4)

- z(t) a une pulsation deux fois plus grande, soit une période deux fois plus courte, mais aussi une amplitude deux fois plus petite que x(t). g(t) est donc z(t) alors que f(t) est x(t).

B.IV.5)

- La trajectoire est cyclique, une période du cycle correspond à deux périodes selon z et une période selon x. L'affectation des axes est donc la suivante :



Pour décrire la trajectoire on passe par 4 extrema selon z et seulement deux selon x.

Fin du problème