CCINP MP 2020

Proposition de corrigé

Auteurs : J. Bellier (Physique PC/PSI – Lycée Saint-Denis – Annonay) et S. Calmettes (Chimie PCSI/PC/PSI – Lycée Saint-Denis – Annonay).
Relecteurs : G. Laibe (CRAL) et N. Lyotard (Physique – Chimie PSI – Lycée La Fayette – Clermont-Ferrand).

Partie I – Lois de Coulomb relatives au glissement

Q1.
a) On étudie, dans le référentiel (R), deux solides S1 et S2 en contact au point I. On note I_1 (respectivement I_2) le point de S1 (respectivement S2) infiniment voisin de I. *A priori* ces points ont des vitesses différentes. On note $\boxed{\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1)}$ la vitesse de glissement de S2 par rapport à S1. En absence d'interpénétration des solides elle s'identifie à la vitesse relative des solides.
b) Dans n'importe quel autre référentiel I_1 et I_2 ont même vitesse d'entraînement car ils ont même point coïncident. La vitesse de glissement est donc indépendante du référentiel d'étude.

Q2. Lorsque $\|\vec{v}_g\| = 0$ on passe de l'adhérence au glissement dès que $T = f_s N$.

Q3. Lorsque $\|\vec{v}_g\| \neq 0$ on passe du glissement à l'adhérence dès que $\|\vec{v}_g\| = 0$.

Partie II – Mesure du coefficient de frottement dynamique

Q4. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Tant que le fil est tendu le solide 1 est en translation horizontale sur le support S et le solide 2 est en translation verticale. Le solide 2 s'arrête quand il touche le support S' et le solide 1 persiste dans son mouvement de translation horizontale, le fil étant détendu.

Q5. On applique le TCI au solide 1 :
- en projection verticale : $\boxed{0 = N - Mg}$;
- en projection horizontale : $\boxed{M\ddot{X} = F - T}$.

On applique le TCI au solide 2 en projection verticale : $\boxed{\alpha M\ddot{Z} = \alpha Mg - F}$.

Q6. La loi de Coulomb du frottement dynamique modélise le comportement des solides en contact à l'échelle microscopique par la relation $\boxed{T = f_g N}$.

Q7.
a) Quand le solide 1 se déplace de X le solide 2 se déplace de Z car le fil est inextensible donc $\boxed{\ddot{X} = \ddot{Z}}$.
b) En éliminant F il vient $(1+\alpha)\ddot{X} = (\alpha - f_g)g$, le mouvement des solides est uniformément accéléré. Comme $\dot{X}(t=0) = 0$ alors $\boxed{\dot{X} = \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} gt}$.
c) Cette phase s'arrête lorsque $H = 0$. Comme $\ddot{X} = \ddot{Z}$ alors $\dot{Z} = \dot{X} = \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} gt$ et $Z = \frac{1}{2}\frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} gt^2 + Z_0$ où $Z_0 = Z(t=0)$. Ainsi $Z(t_1) = Z_0 + H_0$ puisque $H(t=0) = H_0$. Finalement $\frac{1}{2}\frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} gt_1^2 + Z_0 = Z_0 + H_0$ donc $\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha - f_g}}\sqrt{2\,H_0/g} \text{ si } \alpha > f_g}$.
d) Alors $V_1 = \dot{X}(t = t_1) = \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} g \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha - f_g}}\sqrt{2\,H_0/g}$ soit $\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{\alpha - f_g}{1+\alpha}}\sqrt{2gH_0}}$. Si $\alpha \gg f_g$ (faible glissement) et $\alpha \gg 1$ (solide 2 plus lourd que solide 1) on retrouve $V_1 = \sqrt{2gH_0}$ comme si le solide 2 était en chute libre.

Q8.

a) Le TCI appliqué au solide 1, supposé rester en contact avec le support, devient $M\ddot{X} = -T$ en projection horizontale puisque le fil n'est plus tendu. On a toujours $T = f_g N$ et $N = Mg$ donc $\ddot{X} = -f_g g$. Le mouvement du solide 1 est uniformément ralenti. Ainsi $\dot{X} = -f_g g(t - t_1) + V_1$ car $V_1 = \dot{X}(t = t_1)$. Alors $X = -f_g g(t - t_1)^2 + V_1(t - t_1) + X_1$ où $X_1 = X(t = t_1)$. Or $X(t = t_1) = X_0 + H_0$ car $X(t = 0) = X_0$. Finalement $\boxed{X = -\frac{1}{2} f_g g(t - t_1)^2 + V_1(t - t_1) + X_0 + H_0}$.

b) Cette phase s'arrête lorsque $\dot{X} = 0$ à l'instant t_2 tel que $0 = -f_g g(t_2 - t_1) + V_1$. Alors $X(t = t_2) = D + X_0$ soit $D = -\frac{1}{2} f_g g(t_2 - t_1)^2 + V_1(t_2 - t_1) + H_0 = \frac{1}{2} V_1^2 / f_g g + H_0$. On obtient finalement $D = H_0 \left(1 + \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} / f_g\right)$ donc $\boxed{f_g = \frac{\alpha}{1 + (1+\alpha)(D/H_0 - 1)}}$.

Q9. Les solides sont indéformables, initialement au repos, le poids du solide 1 et la réaction normale ne travaillent pas, le fil est sans masse et la poulie est idéale. On a toujours $\dot{Z} = \dot{X}$, $T = f_g N$ et $N = Mg$.

Durant la première phase le TPC au {solide 1 + fil + poulie + solide 2} s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\alpha M\dot{Z}^2\right) = (F - T)\dot{X} + (\alpha Mg - F)\dot{Z}$; on retrouve bien $\boxed{(1 + \alpha)\ddot{X} = (\alpha - f_g)g}$.

Durant la deuxième phase le TPC au {solide 1 + fil + poulie + solide 2} s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} M\dot{X}^2\right) = -T\dot{X}$; on retrouve bien $\boxed{\ddot{X} = -f_g g}$.

Q10. AN : $\boxed{f_g = 0{,}17}$.

Partie III – Mesure du coefficient de frottement statique

Q11. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On applique le TCI au solide 1 à l'équilibre :

- en projection sur direction du plan incliné : $0 = Mg \sin\theta - T$;
- en projection sur sa perpendiculaire : $0 = -Mg\cos\theta + N$.

La loi de Coulomb du frottement statique assure que $T \leq f_s N$ de sorte que $\sin\theta \leq f_s \cos\theta$ donc $\tan\theta \leq f_s$. Dans le cas limite $\boxed{\tan\theta_{lim} = f_s}$ lorsque le solide se met à glisser. La mesure de θ_{lim} permet donc celle de f_s.

Q12. AN : $\boxed{f_s = 0{,}57}$.

Partie IV – Phénomène de « slip-stick »

Q13. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

a) On applique le TCI au solide 1 en MRU lorsqu'il adhère au tapis :
   - en projection horizontale $0 = -kX + T$ car $X_0 > 0$;
   - en projection verticale $0 = -Mg + N$.

   La loi de Coulomb du frottement statique assure que $T \leq f_s N$ de sorte que $kX \leq f_s Mg$. Dans le cas limite $kX_1 = f_s Mg$ lorsque le solide se met à glisser. Ainsi $\boxed{X_1 = f_s Mg/k}$.

b) Le solide se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$ uniforme du tapis, il parcourt la distance $X_1 - X_0$ pendant la durée t_1 telle que $V = (X_1 - X_0)/t_1$. Ainsi $\boxed{t_1 = f_s Mg/kV - X_0/V}$.

Q14.

a) Après la date t_1 le solide glisse sur le tapis. La loi de Coulomb du frottement dynamique s'écrit $T = f_g N$ où $f_g = 0$ donc $T = 0$. Le dispositif est donc analogue à un système masse – ressort sans frottement, le mouvement du solide est celui d'un $\boxed{\text{oscillateur harmonique}}$.

b) Le solide est soumis à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas ; son énergie mécanique se conserve. Le solide atteint son allongement maximal quand sa vitesse s'annule donc $\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} kX_1^2 = 0 + \frac{1}{2} kX_M^2$ soit $\boxed{X_M = \sqrt{X_1^2 + V^2/\omega_0^2}}$ où $\omega_0^2 = k/M$.

Q15.

a) Durant la phase de glissement le TPM s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2\right) = 0$ soit $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$. On retrouve bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de solution $X = A\cos\omega_0(t - t_1) + B\sin\omega_0(t - t_1)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions initiales $X(t = t_1) = X_1$ et $\dot{X}(t = t_1) = V$ conduisent à $X_1 = A$ et $V = B\omega_0$. On obtient finalement $\boxed{X = X_1\cos\omega_0(t - t_1) + V/\omega_0 \sin\omega_0(t - t_1)}$ et $\boxed{\dot{X} = -X_1\omega_0\sin\omega_0(t - t_1) + V\cos\omega_0(t - t_1)}$.

b) Le glissement s'arrête lorsque le solide atteint la vitesse du tapis soit $\boxed{\dot{X}(t = t_2) = V}$.

c) Allures sinusoïdales en quadrature de période τ_0.

Q16. On a $X_M \simeq X_1$ si $X_1^2 \gg V^2/\omega_0^2$ soit $\boxed{X_1/V \gg \tau_0}$ où $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$. En pratique un ressort bien raide et une masse assez faible contribuent à ce que cette condition soit vérifiée.

Q17. Comme $\dot{X}(t = t_2) = V$ alors $V = -X_1\omega_0\sin\omega_0(t_2 - t_1) + V\cos\omega_0(t_2 - t_1)$ donc $V(1 - \cos\omega_0(t_2 - t_1)) = -X_1\omega_0\sin\omega_0(t_2 - t_1)$ soit $V\sin\omega_0(t_2 - t_1)/2 = -X_1\omega_0\cos\omega_0(t_2 - t_1)/2$. En recherchant la plus petite valeur de $t_2 > t_1$ vérifiant $\tan\omega_0(t_2 - t_1)/2 = -X_1\omega_0/V \ll 1$ on trouve $\omega_0(t_2 - t_1)/2 = \pi/2$ soit $t_2 = t_1 + \tau_0/2$. L'adhérence se produit donc en $X(t = t_2) = X_2 = X_1\cos\omega_0(t_2 - t_1) + V/\omega_0\sin\omega_0(t_2 - t_1) = X_1\cos\omega_0\,\tau_0/2 + V/\omega_0\sin\omega_0\,\tau_0/2$ soit $X_2 \simeq -X_M$.
Le solide se déplace alors à la vitesse $\vec{V}$ uniforme du tapis, il parcourt la distance $X_0 - X_2$ pendant la durée t_3 telles que $V = (X_0 - X_2)/t_3$. Ainsi $t_3 = X_0/V + X_2/V$.
Le mouvement se reproduit ensuite indéfiniment, à la période $\tau = t_2 + t_3 = t_1 + \tau_0/2 + t_3 \simeq 2f_sMg/kV$ car $X_1 \simeq X_M \simeq -X_2$ et $X_M/V \gg \tau_0$. La fréquence du mouvement est donc $\upsilon = 1/\tau$ soit $\boxed{\upsilon = V\omega_0^2/2gf_s}$.
AN : $\boxed{\upsilon = 400\ \mathrm{Hz}}$.

Q18. Allure périodique de fréquence υ.

Q19.

a) Les domaines de fréquences évoqués sont ceux des $\boxed{\text{hautes fréquences de l'audible}}$ (son aigu).

b) On constate que $\upsilon \propto k/M$ or $k \propto 1/L^3$ et $M \propto L^3$ où L désigne la dimension typique du bâton ; ainsi $\upsilon \propto 1/L^6$. En cassant la craie $L \searrow$ donc $\upsilon \nearrow$: la fréquence augmente et sort du domaine audible. Par exemple en cassant la craie en 2 on multiplie la fréquence par 2^6 et la vibration monte de 6 octaves.

Q20. Sur une période :

- les forces de frottement sont nulles lors du glissement ;
- dans le référentiel du tapis le solide est immobile lorsqu'il y a adhérence donc le travail des forces de frottement y est nul.

Dans ce modèle $\boxed{\text{les forces de frottement ne travaillent pas}}$.