[Corrigé]

Echanges thermiques à travers un tube cylindrique :

1a) loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda.\vec{\nabla}T$

1b) $\lambda > 0 \iff$ les échanges thermiques ont lieu des régions de plus haute température vers les régions de plus basse température.

donc, une conductivité thermique négative décrirait un phénomène en désaccord avec l'expérience.

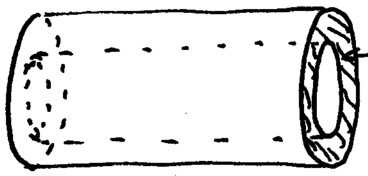
1c) $T = T(r)$ donc $\vec{j_Q} = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot \vec{e_r}$. $\underline{\vec{j_Q} \text{ est radial}}$.

1d)
$$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}$$ où S est le cylindre envisagé.

donc, $\underline{\Phi_{th} = j_Q(r) \cdot 2\pi r l}$

1e) Soit r et r' tels que $R_1 < r < r' < R_2$.

Soit le système délimité par les cylindres de longueur l et de rayons r et r' ainsi que par des couronnes qui "ferment les cylindres" en z et $z+l$.



En régime permanent, l'énergie interne de ce système est constante. En l'absence de production interne d'énergie, on en déduit :

$$\Phi_{th}(r') = \Phi_{th}(r)$$

Ceci étant établi pour tout couple (r, r') dans $(]R_1 ; R_2[)^2$, on a bien $\underline{\Phi_{th} \text{ indépendant de } r}$.

1f) De 1.c) et 1.d), on déduit

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi_{th}}{2\pi\lambda l r}$$

Φ_{th} étant constant, une intégration entre R_1 et r conduit à :

$$\boxed{T(r) = T(R_1) - \frac{\Phi_{th}}{2\pi\lambda l} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}$$

1.g) De l'expression de $T(r)$, écrite pour $r = R_2$, on déduit aisément :

$$\underline{\mathcal{P}_{th} = g \cdot l \cdot (T_1 - T_2)}$$

avec $\boxed{g = \dfrac{2\pi\lambda}{\ln(R_2/R_1)}}$ (g est une conductance linéique).

1.h) A.N : $\underline{g = 41 \quad \mathrm{kW \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}}$

2a) $D_m = \rho \cdot S \cdot v$

2b) Entre t et $t+dt$, les forces de pression fournissent à (Σ) un travail

$$\mathcal{P}_{pr}\, dt = p_e \times (S \times v dt) + p_s \times (-S \times v \times dt)$$

donc
$$\mathcal{P}_{pr} = (p_e - p_s) \times S \times v$$

donc
$$\boxed{\mathcal{P}_{pr} = \frac{D_m}{\rho} \times (p_e - p_s)}$$

2c)
$$dU = U_\Sigma(t+dt) - U_\Sigma(t)$$
$$dU = \left(U_{[z_s\,;\,z_s+vdt]}(t+dt) + U_{[z_e+vdt\,;\,z_s]}(t+dt) \right) - \left(U_{[z_e\,;\,z_s]}(t) \right)$$
$$dU = U_{[z_s\,;\,z_s+vdt]}(t+dt) + U_{[z_e+vdt\,;\,z_s]}(t+dt) - U_{[z_e+vdt\,;\,z_s]}(t) - U_{[z_e\,;\,z_e+vdt]}(t)$$

En régime permanent, on a donc :

$$dU = U_{[z_s\,;\,z_s+vdt]} - U_{[z_e\,;\,z_e+vdt]}$$

Soit,
$$dU = u_s \times \rho \times S \times vdt - u_e \times \rho \cdot S \cdot v \cdot dt$$

donc
$$\underline{dU = D_m \cdot (u_s - u_e) \cdot dt}$$

2.d) Entre t et $t+dt$, (Σ) reçoit un travail $\mathcal{P}_{pr} dt$ et un transfert thermique $\mathcal{P}_{th} dt$ donc le premier principe s'écrit :

$$D_m (u_s - u_e)\, dt = \mathcal{P}_{pr}\, dt + \mathcal{P}_{th}\, dt$$

donc $D_m (u_s - u_e) = \mathcal{P}_{pr} + \mathcal{P}_{th}$

Compte tenu de 2.b), il vient :

$$D_m \left(\left(u_s + \frac{P_s}{\rho}\right) - \left(u_e + \frac{P_e}{\rho}\right)\right) = \mathcal{P}_{th}$$

ou encore

$$D_m \cdot (h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th}$$; h étant l'enthalpie massique du fluide caloporteur.

Le fluide étant incompressible, $h_s - h_e = c_p (T_s - T_e)$, soit, compte tenu des notations adoptées :

$$\boxed{D_m\, c_p \left(T_{fl}(z_s) - T_{fl}(z_e)\right) = \mathcal{P}_{th}}$$

3a) Raisonnons, non plus entre z_e et z_s mais entre z et $z + dz$:

$$D_m \cdot c_p \left(T_{fl}(z+dz) - T_{fl}(z)\right) = d\mathcal{P}_{th}$$

et

$$d\mathcal{P}_{th} = - g \cdot dz \left(T_{fl}(z) - T_m\right)$$ (attention au signe !)

donc

$$D_m \cdot c_p \frac{dT_{fl}}{dz} = - g \cdot \left(T_{fl}(z) - T_m\right)$$

donc

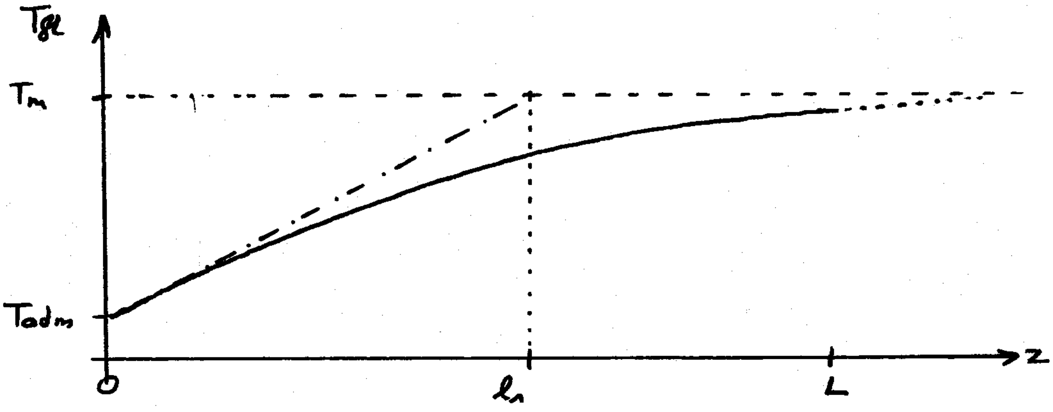
$$\boxed{\frac{dT_{fl}}{dz} = - \frac{T_{fl}(z) - T_m}{\ell_1}}$$

3b) On résout l'équation ci-dessus :

$$T_{fl}(z) - T_m = A . e^{-z/\ell_1} \quad \text{et} \quad T_{fl}(0) = T_{adm}$$

donc

$$\boxed{T_{fl}(z) = T_m + \left(T_{adm} - T_m\right) e^{-z/\ell_1}}$$



choix : $T_m > T_{adm}$; $\ell_1 < L$.

3c) $$\mathcal{P}_{th,ech} = \int_0^L g.dz.(T_{fl}(z) - T_m)$$

dc $$\mathcal{P}_{th,ech} = g.(T_{adm} - T_m)\int_0^L e^{-z/l_1}\,dz$$

dc $$\boxed{\mathcal{P}_{th,ech} = g.l_1.(T_{adm} - T_m).\left(1 - e^{-L/l_1}\right)}$$

si $L \gg l_1$ alors $\mathcal{P}_{th,ech} \simeq g.l_1.(T_{adm} - T_m)$

3d) Reprenons le raisonnement du 3.a :

$$D_m . c_p . \left(T_{fl}(z+dz) - T_{fl}(z)\right) = d\mathcal{P}_{th}$$

et

$$d\mathcal{P}_{th} = \underbrace{-g.dz.\left(T_{fl}(z) - T_m\right)}_{\text{flux latéral}} \underbrace{- \lambda_{fl} S.\frac{dT_{fl}}{dz}(z) + \lambda_{fl}.S.\frac{dT_{fl}}{dz}(z+dz)}_{\text{flux longitudinaux (au sein du fluide)}}$$

donc

$$D_m . c_p . \frac{dT_{fl}}{dz} = -g.\left(T_{fl} - T_m\right) - \lambda_{fl}.S.\frac{d^2T_{fl}}{dz^2}$$

donc

$$\underline{l_1 . \frac{dT_{fl}}{dz} = \left(T_m - T_{fl}\right) + l_2^2 . \frac{d^2 T_{fl}}{dz^2}}$$

avec $\boxed{l_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_{fl}.S}{g}}}$

3.e) $$\left| l_2^2 . \frac{d^2 T_{fl}}{dz^2} \right| \ll \left| l_1 . \frac{dT_{fl}}{dz} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_2^2}{l_1^2} \ll \frac{l_1}{l_1}$$ (car l_1 est longueur caractéristique dans l'approx. souhaitée ...)

$$\Leftrightarrow \quad \underline{l_2^2 \ll l_1^2}$$

$$l_2^2 \ll l_1^2 \iff \frac{\lambda_{gl} \cdot S}{g} \ll \frac{D_m^2 \cdot c_p^2}{g^2}$$

$$\iff \boxed{D_m^2 \gg \frac{g \cdot \lambda_{gl} \cdot S}{c_p^2} = D_{m.c}^2}$$

A.N: $D_{mc} \simeq 0{,}5 \ g \cdot s^{-1}$

4a) On suppose que l'évolution de la température T_m est suffisamment lente pour faire une ARQS. L'étude ci-dessus qui suppose T_m constante reste donc valide et on peut écrire le bilan suivant pour la pièce :

$$\Gamma \cdot \frac{dT_m}{dt} = -\mathcal{P}_{th,\,fuite} + \mathcal{P}_{th,\,ech}$$

soit

$$\Gamma \cdot \frac{dT_m}{dt} = -G_{fuite}\left(T_m - T_{ext}\right) + D_m \cdot C_p \cdot \left(T_{adm} - T_m\right)$$

donc

$$\frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{\Gamma}\left(D_m C_p T_{adm} + G_{fuite} T_{ext} - \left(D_m C_p + G_{fuite}\right) T_m\right)$$

donc

$$\frac{dT_m}{dt} = \frac{D_m C_p + G_{fuite}}{\Gamma}\left(\frac{D_m C_p T_{adm} + G_{fuite} T_{ext}}{D_m C_p + G_{fuite}} - T_m\right)$$

donc

$$\boxed{\frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(T_{st} - T_m\right)}$$

avec

$$\tau = \frac{\Gamma}{D_m C_p + G_{fuite}}$$

$$T_{st} = \frac{D_m C_p \cdot T_{adm} + G_{fuite} T_{ext}}{D_m C_p + G_{fuite}}$$

4.b) . T_{st} est la température de la pièce en régime permanent.

. τ est le temps caractéristique d'évolution de la température de la pièce vers le régime permanent soit l'ordre de grandeur de la durée nécessaire que que ce régime s'établisse.

4.c) • $G_{fuite} \gg D_m c_p \Rightarrow T_{st} \simeq T_{ext}$: Si les fuites thermiques sont trop importantes, le système de chauffage est incapable d'assurer sa fonction...

• $G_{fuite} \ll D_m c_p \Rightarrow T_{st} \simeq T_{adm}$: si les fuites thermiques sont négligeables, le système de chauffage impose, seul, la température de la pièce, indépendamment de la température extérieure.

4.d)
$$D_m = \frac{G_{fuite}\,(T_{st} - T_{ext})}{c_p\,(T_{adm} - T_{st})}$$
; AN : $\underline{D_{mo} \simeq 2\ g.s^{-1}}$ (*)

4.e) • $D_{mo} \simeq 4 . D_{mc}$ donc $\frac{D_{mo}^2}{D_{mc}^2} \simeq 16$ donc $\frac{l_2^2}{l_1^2} \simeq 6.10^{-2} = 6\%$

L'approximation faite se justifie dans ce contexte : on ne dimensionne pas une installation de chauffage à 6 % près.

• si $D_m = D_{mo}$, alors $\underline{\tau \simeq 20\ min.}$

(*) : dans un tuyau de 13mm de diamètre, ce débit correspond à une vitesse moyenne (moyenne sur une section) d'environ 1,5 cm/s.