CORRIGE CCP PC 2 2013

Corrigé proposé par Marc STRUBEL , relu par Nicole ADLOFF
( ) . Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !

Problème A : Thermique dans un réacteur à eau pressurisée :

A.1.1. $$\bar{\varphi}_V = \frac{P_{th}}{N.\pi.r_c^2.H} = \frac{P_e}{\eta.N.\pi.r_c^2.H} = 365W.cm^{-3}$$

A.1.2. Difficile de répondre, mais on attend surement :

$$\bar{\varphi}_S = \frac{P_{th}}{N.2\pi.r_c.H} = \frac{P_e}{\eta.N.2\pi.r_c.H} = 73W.cm^{-2}.$$

Cela n'est vrai qu'en régime stationnaire.

A.1.3. $N_f = P_{th}.\Delta t / E_f = 4{,}2.10^{27}$ désintégrations.

A.2.1. $$dU = \rho.c.S.dx.dT,$$

dT étant la variation de température à x fixé, soit $dT = \frac{\partial T}{\partial t}.dt$.

A.2.2. Le premier principe s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

avec :

$$\delta W = 0 \text{ (phase condensée)}$$
$$\delta Q = \varphi_S(x,t).S.dt - \varphi_S(x+dx,t).S.dt$$

A.2.3. On ajoute alors aux termes précédents :

$$\delta Q' = \varphi_V(x,t).S.dx.dt.$$

A.2.4. Le premier principe donne :

$$\rho.c.dT = \left(-\frac{\partial \varphi_S}{\partial x} + \varphi_V\right).dt$$

A.2.5. La loi de Fourier s'écrit en toute généralité :

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda.\overrightarrow{grad}T$$

, avec ici $\overrightarrow{j_Q} = \varphi_S.\vec{u}_x$, on a donc :

$$\varphi_S = -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}.$$

A.2.6. $$\rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varphi_V$$

A.3.1. En régime stationnaire (plutôt que permanent), T est indépendant de t.
L'invariance par rotation permet de conclure que T est indépendant de θ.
Enfin, la conduction étant radiale, T est indépendant de z.
Ainsi, T = T(r), et l'équation de la chaleur s'écrit à z donné :

$$0=\lambda_c \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\overline{\varphi}_V$$

A.3.2. on en déduit par intégration :

$$T(r)=T_0-\frac{\overline{\varphi}_V}{4.\lambda_c}.r^2 \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta T_{comb}=\frac{\overline{\varphi}_V}{4.\lambda_c}.r_c^2=400K.}$$

A.3.3.1. Dans la gaine $\varphi_V = 0$, l'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$0=\lambda_c \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

On en déduit par intégration :

$$T(r)=\frac{T_p\, ln(r/r_c)-T_g\, ln(r/r_g)}{ln(r_g/r_c)}$$

A.3.3.2. En régime stationnaire, la puissance produite dans le combustible est intégralement évacuée, soit :

$$\varphi_v(z).\pi.r_c{}^2.H = \varphi_S(r).2.\pi.r.H$$
$$\Leftrightarrow \overline{\varphi}_V.r_c^2=\varphi_S(r).2.r$$

Dans la gaine, la loi de Fourier s'écrit, en projection sur $\vec{u}_r$:

$$\varphi_S(r)=-\lambda_g\frac{\partial T}{\partial r}$$

On déduit des deux équations précédentes :

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\overline{\varphi}_V}{\lambda_g}.\frac{r_c^2}{2r}$$

La solution est :

$$T(r)=T_g-\frac{\overline{\varphi}_V}{\lambda_g}.\frac{r_c^2}{2}ln\left(\frac{r}{r_c}\right).$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta T_{gaine}=T_g-T_p=\frac{\overline{\varphi}_V}{\lambda_g}.\frac{r_c^2}{2}ln\left(\frac{r_g}{r_c}\right)=28,0\text{ K.}}$$

3.4. D'après la question 332 :

$$\varphi_S(r_c)=\frac{1}{2.}\overline{\varphi}_V.r_c$$

On en déduit :

$$\Delta T_{contact}=T_c-T_g=\frac{1}{2}\overline{\varphi}_V.r_c.R_{th}=73{,}0\,K.$$

3.5. $$\Delta T_{conv}=T_p-T_f=\frac{\overline{\varphi}_S(r_g)}{\alpha}=-\frac{\lambda_g}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{gaine}=\frac{\overline{\varphi}_V.r_c^2}{2.\alpha.r_g}=20K.$$

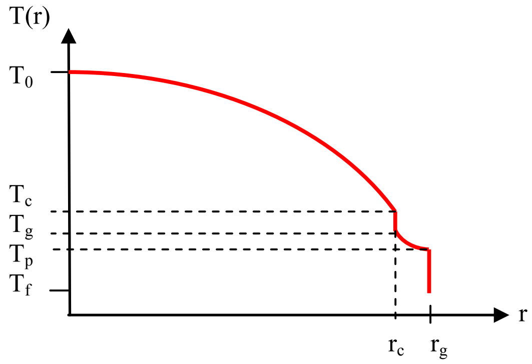
3.6. $$\Delta T_{crayon}=\Delta T_{comb}+\Delta T_{contact}+\Delta T_{gaine}+\Delta T_{conv}$$
$$= 400 + 73 + 28 + 20 = 521\text{ K.}$$

Tous les écarts de température calculés précédemment sont proportionnels à φ_V, donc ΔT_{crayon} également.

On calcule :

$$A=\frac{r_c^2}{4\lambda_c}+\frac{R_{th}.r_c}{2}+\frac{r_c^2}{2\lambda_g}ln\left(\frac{r_g}{r_c}\right)+\frac{r_c^2}{2\alpha r_g}=1{,}43K.W^{-1}.cm^3$$

3.7.



4.1. La puissance échangée à travers 4 quarts de crayon est égale à la puissance fournie par un crayon, donc :

$$\varphi_L(z)=\varphi_V(z).\pi.r_c^2$$

4.2.

$$\delta Q=\varphi_L(z).dt.dz$$

4.3.

$$\delta Q=dH=dh.\rho dV=dh.\rho.S_p.dz$$

On en déduit :

$$dh=\frac{\varphi_L(z).dt}{\rho.S_p}$$

4.4. La hauteur élémentaire d'échange est pendant dt : dz= v.dt.

On déduit de l'équation du 4.3 :

$$c_p.v.\frac{dT_f(z)}{dz}=\frac{\varphi_L(z)}{\rho.S_p}$$

4.5.On déduit de 4.1. et 4.4. :

$$\frac{dT_f(z)}{dz}=\frac{\varphi_L(z)}{\rho.S_p.c_p.v}=\frac{\pi^2.\overline{\varphi}_V.r_c^2}{2.D_m.c_p}.cos(\frac{\pi z}{H})$$

D'où :

$$T_f(z)=\frac{\pi.H.\overline{\varphi}_V.r_c^2}{2.D_m.c_p}.sin(\frac{\pi z}{H})+B$$

$$C=\frac{\pi.H.\overline{\varphi}_V.r_c^2}{2.D_m.c_p}=24\,K$$

La condition $T_f(-H/2) = T_{fe}$ permet de calculer :

$$B=\frac{\pi.H.\overline{\varphi}_V.r_c^2}{2.D_m.c_p}+T_{fe}=C+T_{fe}$$

4.6. D'après la question 3.6. :

$$T_0(z)=T_f(z)+A.\varphi_V(z)=A.\frac{\pi}{2}.\overline{\varphi}_V.cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)+B+C.sin\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

4.7. La condition $\frac{dT_0(z)}{dz} = 0$ donne :

$$\tan\left(\frac{\pi z_{\max}}{H}\right) = \frac{2.C}{\pi.A\overline{\varphi}_V}$$

$$\Leftrightarrow z_{max} = \frac{H}{\pi} arctan\left(\frac{2.C}{\pi A\overline{\varphi}_V}\right)$$

$$z_{max} = \frac{4,3}{\pi} arctan\left(\frac{2*24}{\pi*1,43.10^{-6}*365.10^{6}}\right) = 0,04m << H$$

Cela paraît logique.

On calcule : $T_0(z_{max}) = 1134°C$.

On peut effectivement trouver de telles températures dans un barreau d'oxyde d'uranium.