Corrigé non rédigé

I.A)

1) L'énergie typique mise en jeu dans une émission lumineuse est

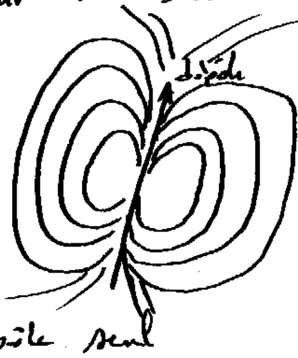
$$E = h.\nu \quad \text{avec} \quad \nu \simeq 5.10^{14}\ \text{Hz} \quad (\text{visible})$$

donc $E \simeq 3.10^{-19}\ \text{J} \simeq 2\ \text{eV}$.

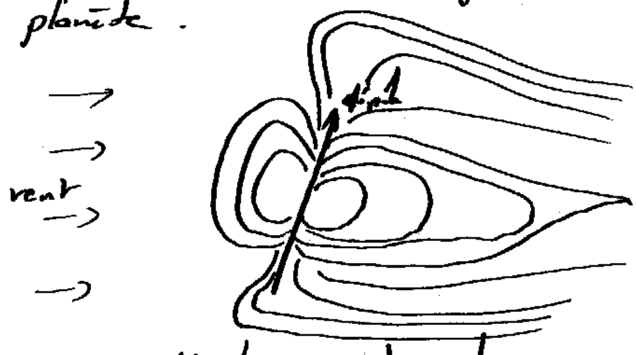
Donc des électrons dont l'énergie est de qq keV peuvent engendrer des phénomènes lumineux.

2) Voir figure 1, les particules du vent solaire sont dirigées simultanément vers les deux pôles de la planète.

3)



dipôle seul



dipôle + vent solaire

→ <u>les lignes de champ sont déformées</u>.

I.B)

1)
$$\frac{F_{grav}}{F_{mag}} \sim \frac{GM_T m}{r^2 . q.v B_0}$$

<u>AN</u>: $r \sim R_T = 6400$ km ; Or, $\frac{GM_T}{R_T^2} = g$

$q = e$

$v \sim \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$ avec $E_c \sim 1$ keV : $v \sim 1{,}8.10^7\ \text{m.s}^{-1}$ $\left(\simeq \frac{c}{20}\right)$

$B_0 \sim$ champ mag. près de la Terre : 5.10^{-5} T

↳ $\frac{F_{grav}}{F_{mag}} \sim 6.10^{-14}$: <u>gravité ultra-négligeable</u> ...

2) L'éq. du mvt est $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$

- <u>1er raisonnement (physique)</u> : à $t=0$, $\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$
  donc la particule n'est pas déviée ; elle continue selon $\vec{e}_z$ ... donc $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ sera nulle à tout instant.
  Donc mvt <u>rectiligne et uniforme</u>.
- <u>2e raisonnement (physique)</u> : - causes ($\vec{B}_0$ et $\vec{v}_0$) invariantes par rotation autour de (Oz). Donc (principe de Curie)
  - conséquence (mvt) invariant par rotation autour de (Oz)
  → trajectoire rectiligne ...

. 3ᵉ raisonnement (mathématique) :

$$\begin{cases} \forall t>0 \quad m\dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = -e\,\vec{v}(t)\wedge\vec{B}_0 \\ \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy. Donc il admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy-Lip....

Or, $\forall t$, $\vec{v}(t)=\vec{v}_0$ est solution.

Donc $\underline{\vec{V}=\vec{v}_0 \text{ est la solution}}$.

↳ l'électron suit les lignes de champ magnétique.

3a) $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\,\vec{v}\wedge\vec{B}_0$

donc $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_c\wedge\vec{v}$ avec $\vec{\omega}_c = \dfrac{e\vec{B}_0}{m}$

$$B_0 \approx \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} = B(r=R_T)\cdot\left(\frac{R_T}{r}\right)^3 \underset{r=R_g}{\sim} 1{,}7\cdot10^{-7}\ \mathrm{T}.$$

donc $\omega_c \sim 3\cdot10^4\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ (80 tr/min ; 4,8 kHz).

3b) . $\vec{B}$ selon $\vec{e}_z$ donc force nulle selon $\vec{e}_z$ donc $v_z = c^{te}$ donc $v_z=0$ car initialement nulle

. Projetons le PFD sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\left|\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \omega_c v_x \end{aligned}\right. \quad \text{ceci s'intègre en} \quad \left|\begin{aligned} v_x - v_{0x} &= -\omega_c\cdot y \\ v_y &= \omega_c\cdot x \end{aligned}\right.$$

Par ailleurs, $\forall t$, $v(t)^2 = v_{0x}^2$ car la force magnétique ne travaille pas.

Donc

$$(v_{0x}+\omega_c y)^2 + (\omega_c x)^2 = v_{0x}^2$$

Donc

$$\boxed{x^2 + \left(y+\frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2}$$

équation d'un cercle de centre $\left(0, -\dfrac{v_{0x}}{\omega_c}\right)$ et de rayon $\boxed{\dfrac{v_{0x}}{\omega_c} = R_c}$

AN : $R_c = \dfrac{v_{0x}}{\omega_c} \sim \dfrac{1{,}8\cdot10^{7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{3\cdot10^{4}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = \underline{600\ \mathrm{m}}$

4a) Par homogénéité, $\alpha = 2$; $\beta = -3$

4b) En supposant que l'énergie de l'électron décroît lentement à l'échelle de son mouvement (i.e $\tau \gg \frac{1}{\omega_c}$), on peut, dans le bilan énergétique

$$\frac{dE_c}{dt} = -\mathcal{S}_{ray}$$

utiliser les résultats précédents : $\begin{cases} v = R_c \omega_c \\ \frac{dv}{dt} = \omega_c v = \omega_c^2 . R_c \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} \frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \omega_c^2 R_c^2\right) = m \omega_c^2 R_c . \dot{R}_c = \frac{B_0 e \omega_c^2}{\omega_c} . R_c \dot{R}_c \\ \text{et} \\ \mathcal{S}_{ray} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} . (\omega_c^2 R_c)^2 \end{cases}$

Donc

$$e B_0 \omega_c R_c . \dot{R}_c + \frac{e^2 \omega_c^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} R_c^2 = 0$$

donc

$$\underbrace{\frac{6\pi\varepsilon_0 B_0 c^3}{e . \omega_c^3}}_{\tau} \times \dot{R}_c + R_c = 0$$

$$\underline{R_c(t) = R_c(0) . e^{-t/\tau}}$$

$\underline{\text{A.N}}$: $\underline{\tau \simeq 2.10^{14} \text{ s}}$; les pertes par rayonnement synchrotron sont négligeables sur les durées considérées ici.
($\tau \sim$ 6 millions d'années ...).

5) Combinaison des deux mouvements (indépendants) précédents : <u>mouvement hélicoïdal</u>.

I.C) $\vec{B} = B_z(z) \vec{u}_z + B_r(r,z) \vec{u}_r$

1) Exprimons, à l'aide du formulaire, que $\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{dB_z}{dz} = 0$$

donc $\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -\underbrace{\frac{dB_z}{dz}}_{\text{indépdt de } r} . r$ donc $r B_r = -\frac{dB_z}{dz} . \frac{r^2}{2} + f(z)$

en $r = 0$ .... $\rightarrow f(z) = 0$

d'<u>où le résultat</u>.

2) $\dfrac{dB_z}{dz} \sim \dfrac{B_z}{L}$ " déf. de L "

donc $B_r \sim \dfrac{r}{2L} \cdot B_z$

donc $\underline{B_r \ll B_z \iff r \ll L}$.

3) $\vec{B}$ essentiellement selon $\vec{z}$. Les résultats du I.B) doivent être approximativement conservés.

$$\boxed{R(z) \simeq \frac{V_\theta}{\omega_c} = \frac{V_\theta \cdot m}{e \cdot B_z(z)}}$$

4) $\vec{\mathcal{M}} = i \cdot \pi R(z)^2 \vec{u}_z$ et $i = \dfrac{-e\omega_c}{2\pi}$

Ainsi, $\mathcal{M}_z = -\dfrac{e\omega_c}{2} \cdot R(z)^2$. De plus, $\omega_c = \dfrac{eB_z}{m}$

donc $$\boxed{\mathcal{M}_z = \frac{-e^2}{2m} \cdot B_z(z) R(z)}$$

De plus, $\mathcal{L}_z = m \cdot R(z) \cdot v_\theta$ donc $\mathcal{L}_z = m R^2(z) \cdot \omega_c$

donc $$\boxed{\mathcal{M}_z = -\frac{e}{2m} \mathcal{L}_z}$$

5) TMC :

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = \left(\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}\right)_z$$

si $\vec{\mathcal{M}}$ est colinéaire à $\vec{B}$ alors $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

et on a $\mathcal{L}_z = c^{te}$ donc $\underline{\underline{\mathcal{M}_z = c^{te}}}$

6) a. et b. L'interaction moment magnétique / champ magnétique fait intervenir l'énergie potentielle $-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$. Ainsi la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \mathcal{M}(z) B(z) = \frac{1}{2} m v_0^2 - \mathcal{M}(0) B(0)$$

Or $\mathcal{M}$ se conserve donc $\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}(0)$

donc

$$\dot{z}^2 - \frac{2\mathcal{M}(0) B_0}{m} \frac{z^2}{L^2} = v_0^2$$

En dérivant :

$$\ddot{z} - \frac{2\mathcal{M}(0) B_0}{m L^2} \cdot z = 0$$

et enfin, on peut remarquer que $\mathcal{M} = -\frac{e}{2m} L_z(0) = -\frac{e}{2m} m R_e v_{0x}$

D'où

$$\boxed{\ddot{z} + \Omega^2 \cdot z = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega^2 = \frac{e B_0 R_e v_{0x}}{m L^2}}$$

. mvt d'oscillation de pulsation Ω. Période ~ 50 s.

. $\dot{z}$ s'annule en z tq : $\frac{e B_0 R_e v_{0x}}{m L^2} z^2 = v_0^2$

$$\text{soit} \quad \boxed{z = \pm \frac{m v_0^2 L^2}{e B_0 R_e . v_{0x}}}$$

7) a - • les électrons tournent autour des lignes de champ magnétiques à une pulsation dont l'ordre de grandeur est

$\omega_c \sim 3.10^4$ rad.s^{-1} sur l'orbite géostationnaire
$\omega_c \sim 3.10^6$ rad.s^{-1} près du sol

La longueur d'onde des ondes e.m. émises est alors

$$\underset{\text{sol}}{200\ \text{m}} \leq \lambda \leq \underset{\text{géostat}}{60\ \text{km}}$$

• Dans les régions polaires, le champ est plus intense donc le rayon synchrotron plus petit ($r B \propto \mathcal{M} = c^{te}$)

De +, $r^2 \omega_c = c^{te}$ (moment cinétique constant)

donc ω_c plus grand.

donc... la puissance rayonnée — prop. à $(r\omega_c^2)^2$ donc à $\frac{1}{r^6}$ — est plus grande