Corrigé non rédigé

A1) Évolution monobare et adiabatique du système {mixeur + eau + résistance}

$$\Delta H = \mathcal{P} . \Delta t_1$$

donc $(m_c + m_0).c.(T_{eb} - T_0) = \mathcal{P} . \Delta t_1$

donc
$$\boxed{\Delta t_1 = \frac{(m_c + m_0).\, c.\,(T_{eb} - T_0)}{\mathcal{P}}}$$

A2)
$$m_c = \frac{\mathcal{P} . \Delta t_0}{c.(T_{eb} - T_0)} - m_0 = \underline{32\,g}$$

B1) Je ne trouve rien dans l'énoncé qui permette de répondre.

B2) a – Le bilan énergétique concernant le système proposé s'écrit :

$$\underbrace{\mu . 4\pi r^2 dr\, c \frac{\partial T}{\partial t}}_{\frac{dU}{dt}\ \left(\text{ou } \frac{dH}{dt} \dots\right)} = \underbrace{j_Q(r,t).4\pi r^2 - j_Q(r+dr,t) 4\pi (r+dr, t)}_{\mathcal{P}_{th}}$$

(ni terme source, ni travail)

donc
$$\mu . c . \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_Q(r,t)\right)$$

Introduisons la loi de Fourier : $j_Q(r,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)$

Il vient :

$$\boxed{\mu c . \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \frac{\lambda}{r^2} . \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)(r,t)}$$

b – $r = r_2 . \rho \qquad t = \theta . \tau$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial r} = \frac{1}{r_2} . \frac{\partial \cdot}{\partial \rho} \quad ; \quad \frac{\partial \cdot}{\partial t} = \frac{1}{\theta} . \frac{\partial \cdot}{\partial \tau}$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\frac{\mu c}{\lambda \theta} . \frac{\partial T}{\partial \tau}(\rho, \tau) = \frac{1}{r_2^2 \rho^2} . \frac{1}{r_2} . \frac{\partial}{\partial \rho}\left(r_2\, \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho}\right)(\rho,\tau)$$

donc

$$\frac{\mu c\, r_2^2}{\lambda \theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho}\right)$$

Il suffit alors que $\boxed{\theta = \frac{\mu c. r_2^2}{\lambda}}$ pour obtenir l'équation proposée. Le temps caractéristique θ croît comme le carré de r_2.

Un œuf 2 fois plus gros cuira en 4 fois plus de temps...

B3) a – $T(\rho,\tau) = T_{ex} + f(\rho).g(\tau)$ est solution de l'Eq. de la chaleur si

$$f(\rho).\, g'(\tau) = \frac{1}{\rho^2} \cdot g(\tau) \left(\rho^2 f'(\rho)\right)'$$

donc si

$$\underbrace{\frac{g'(\tau)}{g(\tau)}}_{\text{fonction de } \tau} = \underbrace{\frac{\left(\rho^2. f'(\rho)\right)'}{\rho^2 . f(\rho)}}_{\text{fonction de } \rho}$$

l'égalité n'est possible que si chaque membre est constant.
La stabilité de l'évolution temporelle nécessite $\frac{g'(\tau)}{g(\tau)} < 0$.

Soit donc $A \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\frac{g'}{g} = -A^2 \quad \text{donc} \quad \underline{g(\tau) = g(0).e^{-A^2\tau}}$$

b – On a

$$\frac{\left(\rho^2 . f'(\rho)\right)'}{\rho^2 . f(\rho)} = -A^2$$

En posant $f(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho}$ il vient :

$$\underline{F'' + A^2 F = 0}$$

On a alors

$$\rho . f(\rho) = \alpha . \cos(A\rho) + \beta \sin(A\rho)$$

$f(\rho)$ n'est définie en 0 que si $\alpha = 0$

donc $f(\rho) = \beta . \frac{\sin(A\rho)}{\rho}$.

c- $\forall A \in \mathbb{R}_+$,

$$T_{eb} + \frac{\beta . \sin(A\rho)}{\rho} . e^{-A^2 \tau}$$ est solution

de l'équation de la chaleur. Par linéarité,

$$T_{eb} + \sum_i \left(\frac{\beta_i \sin(A_i \rho)}{\rho} . e^{-A_i^2 \tau} \right)$$ sera également solution.

Rem : ce sont les conditions aux limites (voir ci-dessous) qui imposent cette restriction aux valeurs possibles de A ...

- Conditions aux limites :
  - continuité du flux en $r = r_2$:

$$\forall t, \quad -\lambda . \frac{\partial T}{\partial r}(r_2, t) = h . (T(r_2, t) - T_{eb})$$

c'est-à-dire

$$\forall \tau, \quad -\frac{\lambda}{r_2} . \sum_i \beta_i (A_i \cos A_i - \sin A_i) e^{-A_i^2 \tau} =$$
$$h . \sum_i \beta_i \sin A_i \, e^{-A_i^2 \tau}$$

donc $\forall i, \quad A_i \cos A_i - \sin A_i = -\frac{h r_2}{\lambda} \sin A_i$

ou encore

$$\boxed{\forall i, \quad A_i = \left(1 - \frac{h r_2}{\lambda}\right) . \tan A_i}$$

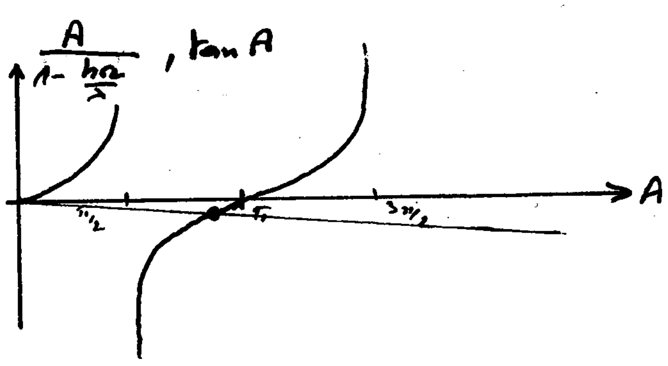
- Profil initial de température :

$$\boxed{T(\rho, 0) = T_{eb} + \sum_i \beta_i . \frac{\sin(A_i \rho)}{\rho}}$$

Ces deux conditions permettent de déterminer $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

B4) a- déjà fait ...

b- $\frac{h r_2}{\lambda} \simeq 50 \gg 1$



Le graphique indique de plus $\frac{hR_e}{\lambda}$ sera grand, plus A se rapprochera de π.

- Numériquement, la solution est : $A \simeq 3{,}08 \simeq \pi - 0{,}06$. $\frac{\Delta A}{A} \simeq \frac{1}{50} = 2\%$

- En posant $A = \pi - \varepsilon$, on obtient

$$\frac{\pi - \varepsilon}{-49} = \tan(\pi - \varepsilon)$$

En linéarisant (car $\varepsilon \ll 1$), on a :

$$\pi - \varepsilon = -49.(-\varepsilon)$$

donc $\varepsilon = \frac{\pi}{50} \simeq 0{,}06$ et $A \simeq 3{,}08$.

c –

$$T(\rho, \tau) = T_{eb} + \beta . \frac{\sin(\pi\rho)}{\rho} . e^{-\pi^2\tau}$$

$$T_{surface} = T(1, \tau)$$
$$= T_{eb} + \beta \sin\pi . e^{-\pi^2\tau}$$
$$= T_{eb}$$: contact thermique parfait avec la vapeur d'eau.

Cette situation correspond à $h \to \infty$.

d – $T(0,0) = T_0$ donc $T_{eb} + \beta . \pi = T_0$

donc $\boxed{\beta = \frac{T_0 - T_{eb}}{\pi}}$

Alors, $T(\rho, \tau) = T_{eb} + (T_0 - T_{eb}) . \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} . e^{-\pi^2\tau}$

B5) a – $T(0, \tau) = T_c \iff \tau = \frac{1}{\pi^2} \ln\left(\frac{T_0 - T_{eb}}{T_c - T_{eb}}\right)$

Ainsi, $\boxed{\Delta t_2 = \frac{\theta}{\pi^2} \ln\left(\frac{T_{eb} - T_0}{T_{eb} - T_c}\right)}$

b – $\Delta t_2 \simeq 10 \text{ min}$: oeuf dur, conforme à l'expérience (la mienne !)

C1) a et b – $E_d = U_{oeufs}(\text{finale}) - U_{oeuf}(\text{initiale})$

$$E_d = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{r_2} \mu . c \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) . 4\pi r^2 dr\right) dt$$

$$\boxed{E_d = \mu c\, 4\pi \int_0^{r_2} \left(T(r,\infty) - T(r,0)\right) r^2 dr}$$

$T(r,0) = T_0$.

et $T_c \leqslant T(r,\infty) \leqslant T_{eb}$

donc

$$\mu c . \frac{4\pi}{3} r_2^3 (T_c - T_0) \leqslant E_d \leqslant \mu c . \frac{4\pi}{3} r_2^3 . (T_{eb} - T_0)$$

AN:

$$\underline{16 \text{ kJ} \leqslant E_d \leqslant 22 \text{ kJ}}$$

c – $\underline{E_d \simeq 19 \text{ kJ}}$.

C2) $$D_m . l_v = \underbrace{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f)}_{\text{puissance thermique reçue par l'eau}} - m \times \frac{dE(t)}{dt}$$

C3) $$\int_0^{\Delta t_2} D_m dt = m_0$$ donc

$$\int_0^{\Delta t_2} \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_f - m\frac{dE}{dt}}{l_v} dt = m_0$$ donc

$$\frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f)\Delta t_2 - m . E_x}{l_v} = m_0$$

Donc $(m \longmapsto m_0)$ est décroissante !

1 oeuf dur : $m_0 = 120\,g$ (énoncé) ; $\Delta t_2 = 10\,min$; $E_d = 19\,kJ$ (C1)) donc $\mathcal{P}_f < 0$ Pb dans le modèle ?

C4) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f + \frac{1}{\Delta t_2}\left(m_0 l_v + n.E_x \right)$

$\mathcal{P}_f \simeq 0$; $n = 7$; $E_x = E_d$ donc

$$\mathcal{P} = \frac{m_0 l_v + 7E_d}{\Delta t_2} \geqslant \frac{7E_d}{\Delta t_2} \quad \text{car} \quad m_0 \geqslant 0$$

donc $\mathcal{P}_{min} = \frac{7E_d}{\Delta t_2} \simeq 222\ W < 350\ W$

On ne peut exclure que le cuiseur proposé puisse cuire 7 oeufs durs

C5) • On lit $\frac{E_d}{l_v} = 5{,}94$ kg donc $E_d \simeq 13\ kJ$.

or $E_d = \mu . c \frac{4\pi}{3} r_2^3 \left(\frac{T_c + T_{eb} - 2T_0}{2} \right)$ (moyenne arithmétique $E_{d\,min}$ et $E_{d\,max}$)

donc $\underline{r_2 = 2{,}2\ cm}$.

• $\frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f)\Delta t_2}{l_v} = 126\ g$ pour les oeufs durs

donc $\Delta t_2 \simeq 13{,}5$ min si $\mathcal{P}_f \simeq 0$.

donc $\Delta t_2 > 13{,}5$ min 35% d'écart avec l'estimation faite plus haut.