Corrigé.

X – MP 2008 – Extrait :

I.1) L'air étant au repos relativement au sol, sa vitesse relativement au rotor est :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{air}}(r) = + r\omega\, \vec{x}_r}$$

I.2) $$\underline{dF_z = \frac{1}{2}\rho . l dr . c_z(\alpha)(r\omega)^2} \quad ; \quad \underline{dF_x = \frac{1}{2}\rho\, l dr . c_x(\alpha).(r\omega)^2}.$$

I.3) Portance :

- résultante : $$\overrightarrow{F_p} = \int_0^R \left(\frac{1}{2}\rho\, l\, c_z(\alpha).(r\omega)^2\right)dr\ \vec{z} \quad (p \text{ pour portance})$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_p} = \frac{1}{2}\rho\, l\, c_z(\alpha)\,\omega^2 . \frac{R^3}{3}\vec{z}}$$

- moment en O : $$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,p}} = \int_0^R (r\vec{y_r})\wedge\left(\frac{1}{2}\rho\, l\, c_z(\alpha)\,\omega^2 r^2\, \vec{z}\right)dr$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,p}} = \frac{1}{2}\rho\, l\, c_z(\alpha)\,\omega^2\,\frac{R^4}{4}\,\vec{x}_r}$$

Traînée : de même,

- résultante : $\overrightarrow{F_t} = \frac{1}{2}\rho\, l\, c_x(\alpha)\omega^2\frac{R^3}{3}\,\vec{x}_r$ (t pour traînée).
- moment : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,t}} = -\frac{1}{2}\rho\, l\, c_x(\alpha)\omega^2\frac{R^4}{4}\,\vec{z}$

I.4) On remarque que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,p}} = \overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{F_p}$ avec $\overrightarrow{OP} = \frac{3R}{4}\vec{y}_r$

La Portance est donc une force (son torseur est un glisseur) appliquée à une distance $R_g = \frac{3}{4}R$ de l'axe du rotor.

Cette remarque vaut aussi pour la traînée. Celle-ci s'applique également en P.

I.5) Si on considère les deux pales, on remarque que la traînée totale a une résultante nulle. Elle est donc un couple dont le moment vaut

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,t}}^{total} = C\,\vec{z} \quad \text{avec} \quad \boxed{C = -\rho\, l\, c_x(\alpha)\,\omega^2\frac{R^4}{4}}$$

I.6) × En ce qui concerne la portance totale, les éléments de réduction en O sont les suivants : ②

$$\begin{cases} \vec{F}_p^{\,total} = \rho\, l\, c_z(\alpha)\, \omega^2 \dfrac{R^3}{3}\, \vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O,p}^{\,total} = \vec{0} \end{cases}$$

(force appliquée en O).

× Dans le référentiel terrestre, on peut écrire le théorème de la résultante cinétique relatif au système "hélicoptère" :

$$M\ddot{z} = -Mg + \rho\, l\, c_z(\alpha)\, \omega^2 \frac{R^3}{3} \quad (1)$$

où z est l'altitude du barycentre de l'hélico.

On suppose que l'hélicoptère décolle donc $\ddot{z} > 0$

donc $\omega^2 > \dfrac{3Mg}{\rho\, l\, c_z(\alpha) R^3}$

× Concernant ce même système, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2\right) = P_{mot} + C\omega + \left(\vec{F}_p^{\,total} - Mg\vec{z}\right)\cdot\left(\dot{z}\vec{z}\right)$$

où on suppose l'axe $\vec{z}$ de l'hélico. fixe ...

Compte tenu de (1), il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = P_{mot} + C\omega$$

On constate que la puissance fournie par le moteur a deux rôles : l'un, de compenser la perte de puissance occasionnée par la traînée et l'autre d'assurer une éventuelle variation de la vitesse de rotation du rotor. Nous sommes à la recherche d'une puissance minimale donc nous supposerons ω constante.

donc $P_{mot} + C\omega = 0$

donc la condition de décollage s'écrit :

$$\underline{\underline{P_{mot} > \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(3Mg)^3}{\rho\, l\, R}} \cdot \left(\frac{c_x}{c_z^{3/2}}\right) = P_0}}$$

I.7) En régime permanent, $P_{mot} + C\omega = 0$

donc $$P_{mot} = \rho \frac{l R^4}{4} \cdot c_x \cdot \omega^3$$

- Si P_{mot} est constante, on aura $c_x \omega^3$ constant

soit $$\omega^2 dc_x + 3\omega c_x d\omega = 0$$

ou encore $$\boxed{d\omega = -\frac{\omega}{3c_x} dc_x}$$

Tant que α reste inférieur à 15°, $\frac{dc_x}{d\alpha} > 0$ donc une augmentation d'incidence ($d\alpha > 0$) conduit à une augmentation de c_x ($dc_x > 0$) donc à une diminution de ω.

- De plus, $C = -\rho l \frac{R^4}{4} c_x \cdot \omega^2$ donc

$$dC = -\rho l \frac{R^4}{4}\left(\omega^2 dc_x + 2\omega c_x d\omega\right) \text{ donc}$$

$$dC = -\rho l \frac{R^4}{4}\left(\omega^2 + 2\omega \cdot c_x \cdot \frac{-\omega}{3c_x}\right) dc_x \text{ donc}$$

$$\boxed{dC = -\rho l \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{3}\omega^2\right) dc_x}$$

donc (α augmente $\Rightarrow$ C diminue).

- Enfin, $F_p^{total} = \rho l c_z \omega^2 \frac{R^3}{3}$ et $c_x = k_1 + k_2 c_z^2$

donc $$dF_p^{total} = \rho l \frac{R^3}{3}\left(\omega^2 dc_z + 2\omega c_z d\omega\right) \text{ et } dc_x = 2k_2 c_z dc_z$$

donc $$dF_p^{total} = \rho l \frac{R^3}{3}\left(\frac{\omega^2}{2k_2 c_z} dc_x - 2\omega c_z \cdot \frac{\omega}{3c_x} dc_x\right)$$

donc $$dF_p^{total} = \rho l \frac{R^3}{3} \omega^2 \left(\frac{1}{2k_2 c_z} - \frac{2c_z}{3c_x}\right) dc_x$$

donc $$dF_p^{total} = \rho l \frac{R^3}{3} \omega^2 \frac{3c_x - 4k_2 c_z^2}{6k_2 c_z c_x} dc_x$$

donc $$dF_p^{total} = \rho l \frac{R^3}{3} \omega^2 \frac{3k_1 - k_2 c_z^2}{6k_2 c_z \cdot c_x} dc_x$$

donc, si $3k_1 > k_2 c_z^2$, c'est-à-dire si $c_z < 0{,}80$ soit encore $\alpha < 8°$,

alors une augmentation d'incidence conduira à une augmentation de portance.

I.8) $R\omega_{max} = 0{,}6\,c$ donc $\underline{\underline{\omega_{max} = \frac{0{,}6c}{R}}} \simeq 40{,}8 \text{ rad/s} \simeq 390 \text{ tr/min}$.

I.9) $P_{mot} = -C\omega$ soit $P_{mot} = \rho \ell\, c_x(0) \cdot \omega_{max}^3 \cdot \frac{R^4}{4}$

$c_x(0) = k_1 + k_2 c_z(0)^2 = k_1$ donc $\underline{P_{mot} \simeq 54 \text{ kW soit } 73 \text{ CV}}$

I.10) En reprenant le raisonnement de la question I.6, on peut exprimer la condition de décollage :

$$c_z(\alpha) > \frac{3Mg}{\rho \ell\, \omega_{max}^2 R^3}$$

donc $$\boxed{\alpha > \frac{3Mg}{k_0 \cdot \rho \ell\, \omega_{max}^2 R^3} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{dec}}$$ $\underline{\alpha_{dec} \simeq 5{,}4°}$

I.11) $\underline{P_{dec} \simeq 130 \text{ kW soit } 174 \text{ CV}}$

I.12) Un moteur récent développant 174 CV a une masse de l'ordre de 90 kg ; Le rapport masse moteur/masse appareil est alors voisin de 7 %.

Donc le rapport masse moteur/masse appareil est d'autant plus petit que le rapport puissance/masse du moteur l'est. Ainsi, la masse susceptible d'être embarquée est d'autant moins limitée ...

I.13) $\forall r \in [0;R],\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$

$\Leftrightarrow\ \forall r \in [0;R],\quad 0 \leq \alpha_1 - \phi \frac{r}{R} \leq \alpha_{max}$

$\Leftrightarrow\quad 0 \leq \alpha_1 - \phi$ et $\alpha_1 \leq \alpha_{max}$

$\Rightarrow\quad \underline{\phi \leq \alpha_1 \leq \alpha_{max}}$

I.14) • $\vec{F_p} = \int_0^R \left(\frac{1}{2}\rho\, l\, c_z(\alpha)(r\omega)^2\right) dr\ \vec{z}$

donc $\vec{F_p} = \int_0^R \frac{1}{2}\rho l\, k_0\left(\alpha_1 - \phi\frac{r}{R}\right).(r\omega)^2\, dr\ \vec{z}$

donc $\vec{F_p} = \frac{1}{2}\rho l k_0 \omega^2 \left(\alpha_1 \frac{R^3}{3} - \phi\frac{R^3}{4}\right)\vec{z}$

donc $\boxed{\vec{F_p} = \frac{1}{2}\rho l k_0 \omega^2 R^3\left(\frac{\alpha_1}{3} - \frac{\phi}{4}\right)\vec{z}}$

• $\vec{\mathcal{M}}_{0,p} = \int_0^R (r\vec{y_r}) \wedge \left(\frac{1}{2}\rho l k_0\left(\alpha_1 - \phi\frac{r}{R}\right).\omega^2 r^2\, \vec{z}\right) dr$

donc $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{0,p} = \frac{1}{2}\rho l k_0 \omega^2 R^4\left(\frac{\alpha_1}{4} - \frac{\phi}{5}\right)\vec{x_r}}$

I.15) α_{eq} est tel que $\frac{\alpha_{eq}}{3} = \frac{\alpha_1}{3} - \frac{\phi}{4}$

donc $\boxed{\alpha_{eq} = \alpha_1 - \frac{3}{4}\phi}$

De plus, $\phi \leq \alpha_1$ donc $\phi \leq \alpha_{eq} + \frac{3}{4}\phi$

donc $\boxed{\frac{\phi}{4} \leq \alpha_{eq}}$

I.16) $\vec{\mathcal{M}}_{0,p} = R^* \vec{y_r} \wedge \vec{F_p}$ si $R^* = R . \dfrac{\frac{\alpha_1}{4} - \frac{\phi}{5}}{\frac{\alpha_1}{3} - \frac{\phi}{4}}$

donc si $\boxed{R^* = \frac{3R}{5}.\frac{5\alpha_1 - 4\phi}{4\alpha_1 - 3\phi}}$; $\boxed{\frac{R^*}{R_g} = 1 - \frac{1}{20}.\frac{\phi}{\alpha_{eq}}}$

$\phi > 0$, $\alpha_{eq} > 0$ donc $R^* < R_g$. L'intérêt du villlage est de rapprocher le point d'application de la portance d'une pale de l'axe du rotor. Ainsi, la pale se courbe moins ...

D'après I.15, $\frac{\phi}{\alpha_{eq}} \leq 4$ donc $R^* > \frac{R_g}{5}$.

I.17)
$$C^* = -2\int_0^R \frac{1}{2}\rho l c_x(\alpha)\omega^2 r^3 dr$$

$$C^* = -\rho l \omega^2 \int_0^R \left(k_1 + k_2 k_0^2\left(\alpha_1 - \phi\frac{r}{R}\right)^2\right) r^3 dr$$

$$C^* = -\rho l \omega^2 \left(\frac{k_1 + k_2 k_0^2 \alpha_1^2}{4} R^4 - \frac{2 k_2 k_0^2 \alpha_1 \phi R^4}{5} + \frac{k_2 k_0^2 \phi^2 R^4}{6}\right)$$

$$\boxed{C^* = -\rho l \omega^2 R^4 \left(\frac{k_1 + k_2 k_0^2 \alpha_{eq}^2}{4} - \frac{k_2 k_0^2 \alpha_{eq}\phi}{40} + \frac{7}{960} k_2 k_0^2 \phi^2\right)}$$

$$\boxed{C(\alpha_{eq}) = -\rho l \omega^2 R^4 . \frac{k_1 + k_2 k_0^2 \alpha_{eq}^2}{4}}$$

Donc

$$\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = 1 + \frac{k_2 k_0^2 \phi}{k_1 + k_2 k_0^2 \alpha_{eq}^2}\left(\frac{7}{240}\phi - \frac{\alpha_{eq}}{10}\right)$$

$$\boxed{\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = 1 + \frac{7 k_0^2 k_2 \phi}{240\, C_{x,eq}}\left(\phi - \frac{24}{7}\alpha_{eq}\right)}$$ avec $C_{x,eq} = k_1 + k_2 k_0^2 \alpha_{eq}^2$

A portance donnée, un villlage optimal relativement à la traînée serait un villlage rendant $\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})}$ minimal. (En effet, portance donnée $\Leftrightarrow$ α_{eq} donné).

Une étude rapide montre qu'un minimum existe : $\phi_{opt} = \frac{12}{7}\alpha_{eq}$

(Cette valeur respecte la condition d'absence d'incidence négative : $\frac{\phi_{opt}}{4} = \frac{3}{7}\alpha_{eq} \leq \alpha_{eq}$)

I.18) $C = -\rho l c_x(\alpha)\omega^2 \frac{R^4}{4}$. Si ω est constante, $\delta C = -\rho l \omega^2 \frac{R^4}{4}\delta c_x$ et $\delta c_x = 2 k_2 k_0^2 \alpha\, \delta\alpha$ donc $\boxed{\delta C = -\rho l \omega^2 \frac{R^4}{2} k_2 k_0^2 \alpha\, \delta\alpha}$

I.19) $\omega_{max,ac} = \dfrac{0{,}6\,c}{R_{ac}} \simeq 255 \text{ rad/s} \simeq 2435 \text{ tr/min}$.

$$\zeta = \frac{\omega_{max,ac}}{\omega_{max}} = \frac{R}{R_{ac}} = 6{,}25$$

I.20) L'effort de portance du rotor de queue est une force appliquée au point O_{ac} de l'axe de ce rotor.

Son moment en O est : $\vec{\mathcal{M}}^{ac}_{O,P} = + d_{ac} \cdot \rho\, l_{ac} \cdot c_z(\alpha_{ac})\, \omega_{ac}^2 \cdot \dfrac{R_{ac}^3}{3}\, \vec{z}$ (signe ?)

La direction de l'appareil est conservée si le moment en O, projeté sur $\vec{z}$, des efforts extérieurs est constamment nul (les vitesses angulaires étant constantes...)

donc si,

$$-\rho\, l\, c_x(\alpha)\, \omega^2 \frac{R^4}{4} + d_{ac} \cdot \rho\, l_{ac}\, c_z(\alpha_{ac})\, \omega_{ac}^2 \frac{R_{ac}^3}{3} = 0$$

On en déduit :

$$l\, \delta c_x(\alpha)\, \omega^2 \frac{R^4}{4} = d_{ac} \cdot l_{ac} \cdot \delta c_z(\alpha_{ac})\, \omega_{ac}^2 \cdot \frac{R_{ac}^3}{3}$$

et si le profil des pales du rotor de queue est identique à celui des pales du rotor principal, $\delta c_z(\alpha_{ac}) = k_0\, \delta\alpha_{ac}$

Donc,

$$\boxed{\delta\alpha_{ac} = \frac{3\, l\, \omega^2 R^4}{2\, l_{ac}\, \omega_{ac}^2\, R_{ac}^3\, d_{ac}}\, k_2 k_0\, \alpha\, \delta\alpha}$$

I.21) Le couple de traînée sur le rotor principal est-il modifié lors d'une accélération ?

L'énoncé ne contient pas d'élément susceptible de nous aider à proposer une réponse !!