Corrigé non rédigé

I

1) * Copernic : | origine = centre de masse du système solaire
| axes qui pointent vers 3 étoiles très lointaines.

* Géocentrique : | origine : centre de masse de la Terre
| en translation par rapport à Copernic.

* Terrestre : lié à la Terre.

À quelle(s) condition(s) peuvent-ils être considérés comme galiléens ? On peut imaginer ici plusieurs niveaux de réponse... On pourrait dire qu'il peuvent être considérés comme galiléens tant que cette hypothèse suffit à prédire correctement les observations.

2) $\vec{F}_g = -\dfrac{G\, m_T m_L}{r^3}\,\vec{TL}$

3) TMC en T : $\dfrac{d\vec{\sigma}_T(\text{Lune})}{dt} = \vec{0}$ car $\vec{TL}\wedge\vec{F}_g = \vec{0}$

donc $\vec{TL}\wedge\vec{v}(L) = \vec{c^{te}}$

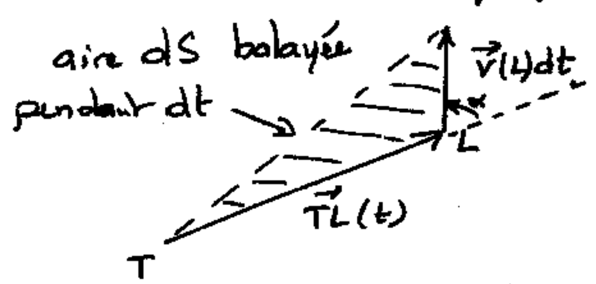
donc la droite orthogonale au plan $(\vec{TL}(t)\,;\,\vec{v}(L,t))$ est toujours la même

donc ce plan est toujours le même : <u>le mvt est plan</u>.

4) $\vec{TL}\wedge\vec{v}(L) = \vec{c^{te}}$ or $\vec{TL} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{v}(L) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

donc $\underline{r^2\dot{\theta} = c^{te}}$

5) 2e loi de Kepler : | le rayon vecteur (ici $\vec{TL}$) balaie des aires égales pendant des temps égaux.



$dS = \frac{1}{2}\|\vec{TL}\|.\underbrace{\|\vec{v}(L)dt\|.\sin\alpha}_{\text{hauteur du triangle}}$

donc $dS = \frac{1}{2}\|\vec{TL}\wedge\vec{v}(L)dt\|$

donc $\dfrac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|C| = c^{te}$

CQFD

6) $\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + \dfrac{C}{r}\,\vec{e_\theta} \\ \vec{L_T} = m_L C\,\vec{e_z} \end{cases}$

7) $$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{Gm_T m_L}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\wedge\vec{L_T} + \vec{v}\wedge\underbrace{\frac{d\vec{L_T}}{dt}}_{\substack{=\vec{0}\\(\text{TMC})}}\right) - \frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

PFD ↓

donc
$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{Gm_T m_L}\left(-\frac{Gm_T}{r^2}\,\vec{e_r}\wedge\vec{L_T}\right) - \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

donc
$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{C}{r^2}\,\vec{e_\theta} - \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad \text{car } \vec{L_T} = m_L C\,\vec{e_z}$$

donc $\boxed{\dfrac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}}$ car $C = r^2\dot{\theta}$.

8) $$\vec{e}\cdot\vec{TL} = \frac{1}{Gm_T m_L}\,r\vec{e_r}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{L_T}) - r\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}$$

$$e\,\vec{e_x}\cdot r\,\vec{e_r} = \frac{1}{Gm_T m_L}\,r\,\vec{e_r}\cdot\left(-m_L C\dot{r}\,\vec{e_\theta} + \frac{m_L C^2}{r}\,\vec{e_r}\right) - r$$

$$r\,e\cos\theta = \frac{1}{Gm_T}\,C^2 - r$$

$$r(1 + e\cos\theta) = \frac{C^2}{Gm_T} \quad \text{soit} \quad \boxed{r = \frac{C^2/Gm_T}{1 + e.\cos\theta}}$$

ellipse d'excentricité $e = \|\vec{e}\|$
et de paramètre $p = \dfrac{C^2}{Gm_T}$.

9) Apogée : point de la trajectoire le plus éloigné de T
Périgée : " " " " " " proche " "

10) $\begin{cases} r_P = r(\theta=0) = \dfrac{p}{1+e} \\ r_A = r(\theta=\pi) = \dfrac{p}{1-e} \end{cases}$

donc (tous calculs faits) : $\left| \begin{array}{l} e = \dfrac{\frac{r_A}{r_P} - 1}{\frac{r_A}{r_P} + 1} \\ p = \dfrac{2 r_A r_P}{r_A + r_P} . \end{array} \right.$

A.N : $e = 0,0654$; $p = 3,80.10^8\ m$.

$C = \sqrt{G m_T p} \simeq 3,89.10^{11}\ m^2.s^{-1}$

11) $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2} C$ donc par intégration sur une période, on a

$$\pi \sqrt{a^3 p} = \frac{1}{2} C . T_L$$

Or $p = \dfrac{C^2}{G m_T}$ donc $\pi^2 a^3 . \dfrac{C^2}{G m_T} = \dfrac{1}{4} C^2 . T_L^2$

donc $\boxed{\dfrac{a^3}{T_L^2} = \dfrac{G m_T}{4\pi^2}}$

12) $\sqrt{\dfrac{4\pi^2 a^3}{G m_T}} = 2,35.10^6\ s$; L'énoncé donne $T_L = 2,36.10^6\ s$

c'est cohérent.

13) $E_p = - \dfrac{G m_T m_L}{r}$.

14) $E_c = \dfrac{1}{2} m_L v^2 = \dfrac{1}{2} m_L \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right)$

$E_c = \dfrac{1}{2} m_L \left(\dot{r}^2 + \dfrac{C^2}{r^2} \right)$

15) $E_m = m_L \left[\dfrac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \dfrac{C^2}{r^2} \right) - \dfrac{G m_T}{r} \right]$

Elle se conserve car la seule force que subit la Lune dérive de Ep ...

16) $$\begin{cases} E_m = m_L \left[\dfrac{C^2}{2r_P^2} - \dfrac{Gm_T}{r_P} \right] & \text{car } \dot{r} \text{ est nul en P} \\ E_m = m_L \left[\dfrac{C^2}{2r_A^2} - \dfrac{Gm_T}{r_A} \right] & \text{———— A} \end{cases}$$

J'exprime C^2 grâce à l'une de ces équations et je substitue dans l'autre. J'obtiens :

$$E_m = -\frac{Gm_T m_L}{r_A + r_P} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{E_m = -\frac{Gm_T m_L}{2a}}$$

<u>A.N</u>: $E_m = -3{,}59 \cdot 10^{28}\ \mathrm{J}$.

II)

1) $$\Delta\vec{g} = -Gm_T\,\vec{e_r}\left[\frac{1}{(a-R_L)^2} - \frac{1}{(a+R_L)^2}\right]$$

$$\Delta\vec{g} = -\frac{Gm_T\,\vec{e_r}}{a^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{R_L}{a}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{R_L}{a}\right)^2}\right]$$

soit au 1er ordre :

$$\underline{\Delta\vec{g} = -\frac{4Gm_T}{a^3} \cdot R_L\ \vec{e_r}} \quad ; \quad \|\Delta\vec{g}\| = 1{,}24 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m.s^{-2}}.$$

2) Voir ce qu'on a fait en cours sur les forces de marées. Là, l'énoncé est un peu gonflé ... qu'attend-il ?

3) $A : \omega_P > \omega_L$ et $B : \omega_P < \omega_L$

Soit R le référentiel tel que $\vec{\Omega}_{R/\text{Ref géo}} = \omega_L \cdot \vec{e_z}$

Alors, $\vec{\Omega}_{\text{Lune}/R} = (\omega_P - \omega_L)\vec{e_z}$.

et $$\begin{cases} \vec{\Omega}_{\text{Lune}/R} \cdot \vec{e_z} > 0 & \text{correspond au cas A} \\ \vec{\Omega}_{\text{Lune}/R} \cdot \vec{e_z} < 0 & \text{" " " B.} \end{cases}$$

4) $\mathcal{L}_p = \frac{2}{5}(m_L - 2\Delta m) R_L^2 . \omega_p$

L'énoncé suggère de ne pas considérer la contribution des deux masses Δm ; ce que je ne comprends pas.

J'écrirais donc

$$\mathcal{L}_p = \frac{2}{5}(m_L - 2\Delta m) R_L^2 \omega_p + (\Delta m . R_L^2 \omega_p) \times 2$$

$$\mathcal{L}_p = \left(\frac{2}{5} m_L + \frac{6}{5}\Delta m\right) R_L^2 \omega_p = \underline{\frac{2}{5}(m_L + 3\Delta m) R_L^2 \omega_p} .$$

5) $$\vec{\mathcal{M}}_L = \underbrace{\vec{LL} \wedge \frac{-Gm_T(m_L - 2\Delta m)}{a^2}\vec{e_r}}_{=\vec{0}} + \vec{LL_1} \wedge \frac{-Gm_T\,\Delta m}{TL_1^3}\vec{TL_1} + \vec{LL_2} \wedge \frac{-Gm_T\,\Delta m}{TL_2^3}\vec{TL_2}$$

Or $\vec{LL_2} = -\vec{LL_1}$ et $\left| \begin{array}{l} \vec{TL_1} = \vec{TL} + \vec{LL_1} \\ \vec{TL_2} = \vec{TL} - \vec{LL_1} \end{array}\right.$

donc

$$\vec{\mathcal{M}}_L = -Gm_T\,\Delta m \underbrace{\vec{LL_1} \wedge \vec{TL}}_{+aR_L \sin\varphi\,\vec{e_z}} \cdot \left[\frac{1}{TL_1^3} - \frac{1}{TL_2^3}\right]$$

Or $$TL_1^2 = (\vec{TL} + \vec{LL_1})^2$$
$$= TL^2 + 2\vec{TL}\cdot\vec{LL_1} + LL_1^2$$
$$= a^2\left(1 + \frac{2\vec{TL}\cdot\vec{LL_1}}{a^2} + \frac{LL_1^2}{a^2}\right)$$

donc $$\frac{1}{TL_1^3} = \frac{1}{a^3}\left(1 + \frac{2\vec{TL}\cdot\vec{LL_1}}{a^2} + \frac{LL_1^2}{a^2}\right)^{-3/2}$$

donc $\frac{1}{TL_1^3} \simeq \frac{1}{a^3}\left(1 - \frac{3\vec{TL}\cdot\vec{LL_1}}{a^2}\right)$ à l'ordre le plus bas en $\frac{LL_1}{a}$.

de même $$\frac{1}{TL_2^3} \simeq \frac{1}{a^3}\left(1 + \frac{3\vec{TL}\cdot\vec{LL_1}}{a^2}\right)$$

donc $$\vec{\mathcal{M}}_L = +6Gm_T\,\Delta m\; aR_L \sin\varphi \left[\frac{\vec{TL}\cdot\vec{LL_1}}{a^5}\right]\vec{e_z} \;;$$

De plus, $\vec{TL}\cdot\vec{LL_1} = a\vec{e_r}\cdot\vec{LL_1} = -aR_L\cos\varphi$

donc $\mathcal{M}_L = -3\,G.m_T.\Delta m . \frac{R_L^2}{a^3} \sin(2\varphi)$ | Erreur d'énoncé. Par symétrie, il est attendu que $\mathcal{M}_L$ s'annule pour $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}$ et π ...

6) TMC en L : (L étant le barycentre du système étudié, même non fixe on a $\frac{d\mathcal{L}_L}{dt} = \mathcal{M}_L$)

$$\underline{J . \dot{\omega}_p = - K . \sin(2\varphi)} \qquad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} J = \frac{2}{5}\left(m_L + 3\Delta m\right) R_L^2 > 0 \\ K = 3 G m_T \Delta m \frac{R_L^2}{a^3} > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{donc} \quad \left| \begin{array}{lllll} \sin(2\varphi) > 0 & \Rightarrow & \dot{\omega}_p < 0 & \Rightarrow & \omega_p \searrow \\ \sin(2\varphi) < 0 & \Rightarrow & \dot{\omega}_p > 0 & \Rightarrow & \omega_p \nearrow \end{array} \right.$$

On en déduit que $\varphi = 0$ est une situation stable (correspondant à ω_p constant) alors que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ correspondent à des situations instables.

7) Le système évoluera vers la seule situation stable (à cause de dissipations non prises en compte) donc vers $\varphi = 0$. Cette situation est bien celle du "verrouillage gravitationnel" pour laquelle $\omega_p = \omega_L$.

8) Le changement de vitesse angulaire propre de la Terre peut aussi s'expliquer par la déformation qu'elle subit (tout comme la Lune) à cause des effets de marées —
Par analogie/symétrie, on s'attend à ce que cette vitesse angulaire se verrouille de telle manière que la Terre présentera toujours la même face à la Lune. Actuellement, $\omega_{Terre} > \omega_L$ donc ω_{Terre} tend à ralentir : la durée du jour s'allonge.