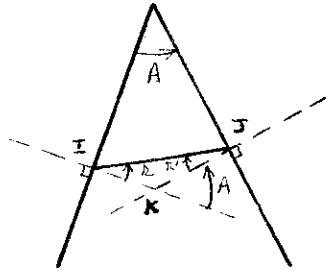


Partie A: Etude d'un prisme.

I.1) cf. cours.

I.2) 1 - $\sin i = n \sin r$ (1); $n \sin r' = \sin i'$ (2)



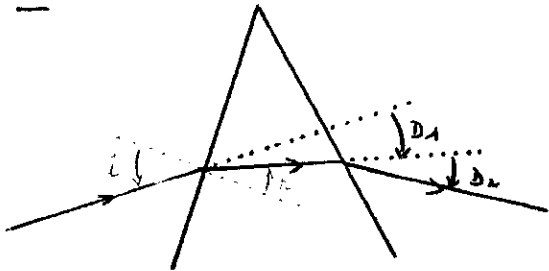
En exprimant que la somme des angles du triangle IJK est π , il vient :

$$r + r' + (\pi - A) = \pi \quad (*)$$

donc $A = r + r'$ (3)

(*) Attention : les choix d'orientation de l'énoncé peuvent être source d'ambiguïté...

2 -



$$D = D_1 + D_2$$

or $\begin{cases} D_1 = i - r \\ D_2 = i' - r' \end{cases}$

(même remarque
(*))

donc $D = i + i' - A$

I.3) $D(i) = i + i'(i) - A$

$$\frac{dD}{di}(i) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 1 + \frac{di'}{di}(i) = 0$$

or $\begin{cases} \cos i \cdot di = n \cdot \cos r \cdot dr \\ n \cos r' \cdot dr' = \cos i' \cdot di' \\ dr + dr' = 0 \end{cases}$

(par différentiation de (1), (2) et (3))

donc $\frac{di'}{di} = - \frac{\cos r'}{\cos r} \cdot \frac{\cos i}{\cos i'}$

donc $\frac{dD}{di} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \cos r' \cdot \cos i = \cos r \cdot \cos i' \\ \sin^2 i' = \sin^2 i \\ i' = -i \quad (\text{impossible car alors } r' = -r \text{ alors } A \neq 0 \dots) \\ \text{ou} \\ i' = i \end{cases}$

après un peu de travail...

Q.E.D.

I.4) Soit i_m l'incidence donnant la situation de déviation minimale.

Alors, $i'_m = i_m$ donc $r'_m = r_m$ (d'après (1) et (2))

donc $2r_m = A$ (d'après (3))

donc $\sin i_m = n \cdot \sin \left(\frac{A}{2} \right)$ (d'après (4))

Par ailleurs, $D_m = D(i_m)$ soit $D_m = i_m + i_m - A$ (car $i'_m = i_m$)

donc $\frac{D_m + A}{2} = i_m$

donc $n \cdot \sin \frac{A}{2} = \sin \left(\frac{D_m + A}{2} \right)$

Méthode exp^{te} : vue en sup. en TP....

II.1) Une régression linéaire donne $\begin{cases} a = 1,534 \\ b = 9,101 \text{ nm}^2 \end{cases}$

II.2) L'équation établie à la question I.4 montre que D_m est fonction de n , donc de λ .

II.3) $\sin i_0 = n(\lambda_0) \cdot \sin \left(\frac{A}{2} \right)$ (cf. I.4) donc $i_0 = 51,3^\circ$

II.4) Différencier les relations citées : (ici i est fixé à la valeur i_0 ; c'est n qui est susceptible de changer...)

$$\begin{cases} 0 = dn \cdot \sin r + n \cdot \cos r \cdot dr \\ dn \cdot \sin r' + n \cdot \cos r' \cdot dr' = \cos i' \cdot di' \\ 0 = dr' + dr \end{cases}$$

Or $i' = i = i_0$ et $r = r' = \frac{A}{2}$ (min. de déviation)

donc $di' = \frac{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos i_0} dn$ (par simple substitution)

donc $\frac{di'}{d\lambda} = 2 \cdot \frac{\sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos(i_0)} \frac{dn}{d\lambda}$

II.5.1) cf. TP de sup...

II.5.2). Le centre de l'image de la fente F est le foyer de O_2 . (3)

• L'ensemble des incidences sur la face d'entrée du prisme est $[i_0 - di; i_0 + di]$
avec $di = \frac{l}{2f'}$.

donc l'ensemble des "émergences" de la face de sortie est $[i'_0 - di'; i'_0 + di']$

car $i' = i_0$ et $|di'| = |di|$

donc la largeur de l'image est $2f'_{O_2} \times di$. Mais $f'_{O_2} = f'$, donc

la largeur de l'image est l .

II.5.3) soit $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$.

$$i'(\lambda_1) = i'(\lambda_0 - \Delta\lambda) \approx i'(\lambda_0) - \Delta\lambda \cdot \left. \frac{di'}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} \quad (\text{DL ordre 1})$$

de même,

$$i'(\lambda_2) = i'(\lambda_0 + \Delta\lambda) \approx i'(\lambda_0) + \Delta\lambda \cdot \left. \frac{di'}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}$$

Si on note F' le foyer de O_2 , C_1 et C_2 les centres des images de F correspondant respectivement à λ_1 et λ_2 alors.

$$\begin{cases} \overline{F'C_1} = f'_x (i'(\lambda_1) - i'(\lambda_0)) & (\text{conditions de Gauss; } \tan(i' - i'_0) \approx i' - i'_0) \\ \overline{F'C_2} = f'_x (i'(\lambda_2) - i'(\lambda_0)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{F'C_1} = -2f'_x \Delta\lambda \cdot \frac{\sin(A/2)}{\cos(i_0)} \cdot \frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda} \\ \overline{F'C_2} = -\overline{F'C_1} \end{cases}$$

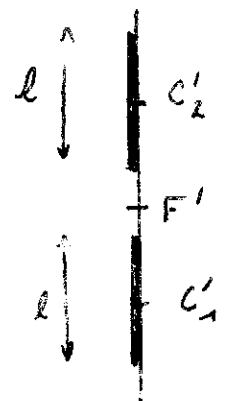
Le schéma ci-contre montre que ces images sont séparées si

$$C'_1 C'_2 \geq l$$

donc si

$$f' \geq l \cdot \frac{\cos(i_0)}{4 \cdot \sin(A/2)} \cdot \frac{1}{\Delta\lambda \cdot \left| \frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda} \right|} = 3,3 \text{ mm}.$$

donc la séparation des images est facilement accessible au laboratoire...

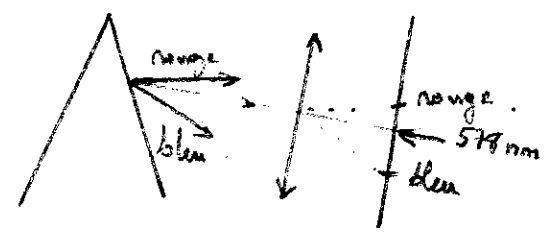


II.5.4) On observe sur l'écran le spectre de la lumière blanche.

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{di'}{d\lambda} < 0 \quad (\text{car } \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2\lambda}{\lambda^3} < 0)$$

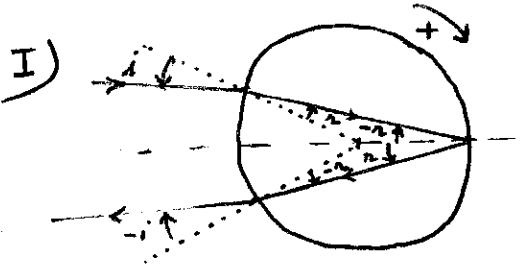
donc $D(\text{rouge}) < D(\text{bleu})$;

Ainsi, le spectre est ordonné comme le montre le schéma ci-contre →



II.5.5) Autre montage : on substitue au prisme un réseau.

Partie B :



La déviation s'écrit :

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

$$D = (-i+r) + (\pi + 2r) + (r-i)$$

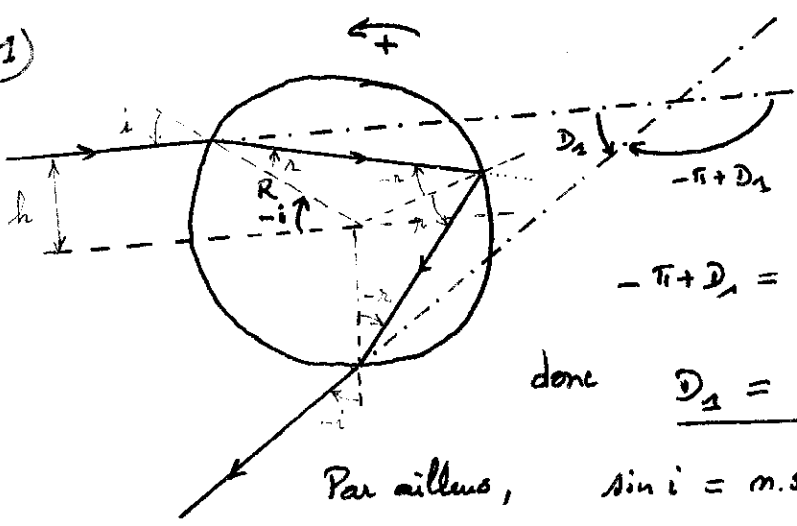
$$\underline{D = \pi + 2.(2r-i)}$$

On souhaite avoir $D = \pi$. Pour cela, il faut et il suffit que $\underline{2r=i}$

Or, $\sin i = n \cdot \sin r$ et on fait l'hypothèse d'incidence faible
donc $\underline{i \approx n \cdot r}$.

Donc, avec des rayons parallèles ($i \approx n \cdot r$), la déviation vaut π ($2r=i$)
si et seulement si $\underline{n = 2}$

II.1.1)



On écrit $-\pi + D_1$ comme la somme de trois déviations.

$$-\pi + D_1 = (-i+r) + (-\pi + 2r) + (r-i)$$

$$\text{donc } \underline{D_1 = 4r - 2i}$$

Par ailleurs, $\sin i = n \cdot \sin r$ et $r = + \sin i$

$$\underline{\text{donc } D_2 = +4 \arcsin\left(\frac{r}{n}\right) - 2 \arcsin(r)}$$

$$\left. \frac{dD_1}{da} \right|_{\alpha_m} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{4}{n}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_m}{n}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \alpha_m^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

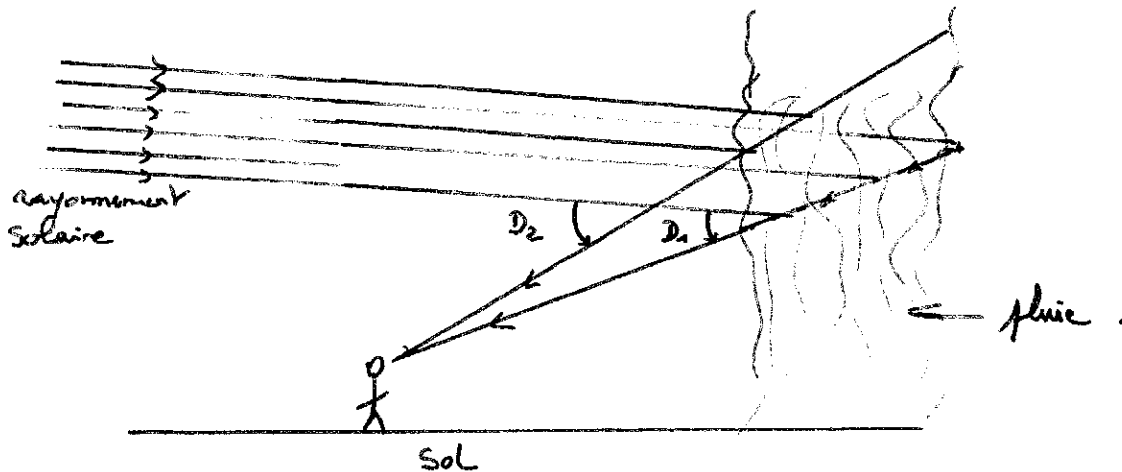
A.N: $\alpha_m = 0,86$; $D_{1m} = 41,5^\circ$

II.1.2) $D_{2m} = 51,9^\circ$

II.2.1). Pourquoi un arc ? A cause de la symétrie de révolution autour de l'axe Soleil-œil.

- Pourquoi lumineux ? Aux étudiants d'inventer la réponse car l'énoncé ne permet pas de montrer qu'en les minima de déviation l'intensité est plus forte qu'ailleurs.
- Pourquoi, quand il est visible, le second arc est moins intense ? parce qu'après deux réflexions dans une goutte, l'onde lumineuse a une amplitude amoindrie deux fois par le phénomène réflexion/réfraction...

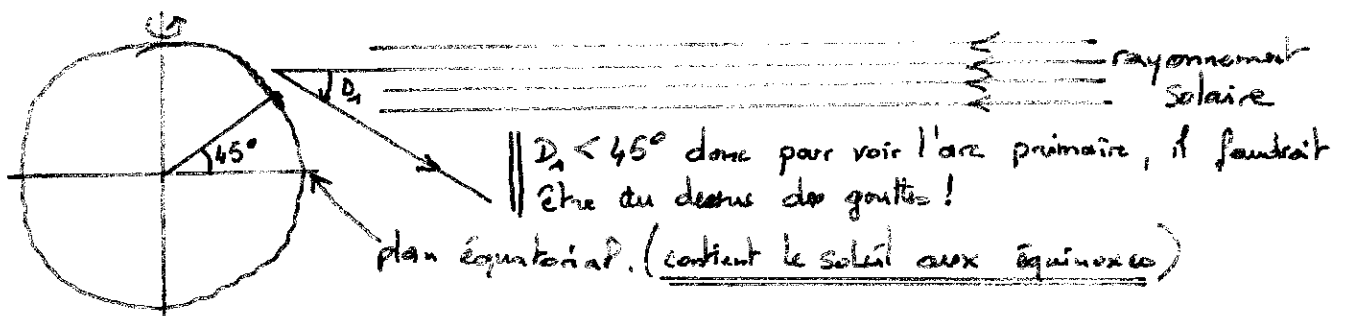
II.2.2)



II.2.3) Les rayons angulaires moyens(!) des arcs sont D_1 et D_2 .

Sur le schéma ci-dessus on constate que l'arc secondaire est vu au dessus de l'arc primaire (car $D_2 > D_1$).

II.2.4)



⑥

II.2.5) D_1 et D_2 sont des fonctions de l'indice et celui-ci est fonction de la longueur d'onde. Donc il y a autant d'arcs primaires que de longueurs d'onde dans le spectre solaire (idem pour les arcs secondaires...)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2(\text{violet}) = 53,6^\circ \\ D_2(\text{rouge}) = 50,2^\circ \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} D_1(\text{violet}) = 40,6^\circ \\ D_1(\text{rouge}) = 42,4^\circ \end{array} \right.$$

donc

