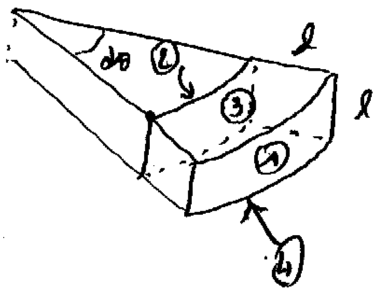
Corrigé non rédigé

10) $T = T(\theta, t)$ or $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T$ donc $\vec{j}_{th} = -\dfrac{\lambda}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$.

Partie A :

11) Le mesure étant bon conducteur thermique (métal), le contact thermique entre les thermomètres et l'anneau sera efficace et les mesures pertinentes ...

12)



dS_{lat} a 4 contributions.

$$dS_{lat} = \underbrace{l \times \left(R + \frac{l}{2}\right) d\theta}_{(1)} + \underbrace{l \times \left(R - \frac{l}{2}\right) d\theta}_{(2)} + \underbrace{2 \times R d\theta\, l}_{(3)\ \text{et}\ (4)}$$

$$dS_{lat} = 4 R l\, d\theta \quad \text{(il suffit de développer).}$$

- $d\tau$ = aire de (3) $\times\, l$

$$d\tau = R\, d\theta \cdot l \times l = l^2 R\, d\theta$$

13) $$\phi_{(\theta,t)} = \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{r=R-l/2}^{R+l/2} -\frac{\lambda}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta,t)\, dr\, dz$$

donc $$\boxed{\phi(\theta,t) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta,t) \times l \times \ln\left(\frac{R+l/2}{R-l/2}\right)}$$

Si $l \ll R$, un développement du logarithme conduit à

$$\phi(\theta,t) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta,t) \times \frac{l^2}{R}.$$

14) $\ell^2 R d\theta . \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = j_Q(\theta,t)\ell^2 - j_Q(\theta+d\theta)t\,\ell^2 - h\left(T(\theta,t)-T_e\right)dS_{lat}$ (2)

donc

$$\ell^2 R \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial \theta}\ell^2 - h.\left(T(\theta,t)-T_e\right)4R\ell$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c R^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{\rho c \ell}(T-T_e)}$$

Partie B :

15) En régime stationnaire $\left(\frac{\partial\cdot}{\partial t}=0\right)$, il vient :

$$\underline{\frac{d^2T}{d\theta^2} - \left(\frac{R}{a}\right)^2.(T-T_e) = 0} \quad ; \text{ avec } \quad a = \sqrt{\frac{\ell\lambda}{4h}}$$

<u>a est une longueur</u>.

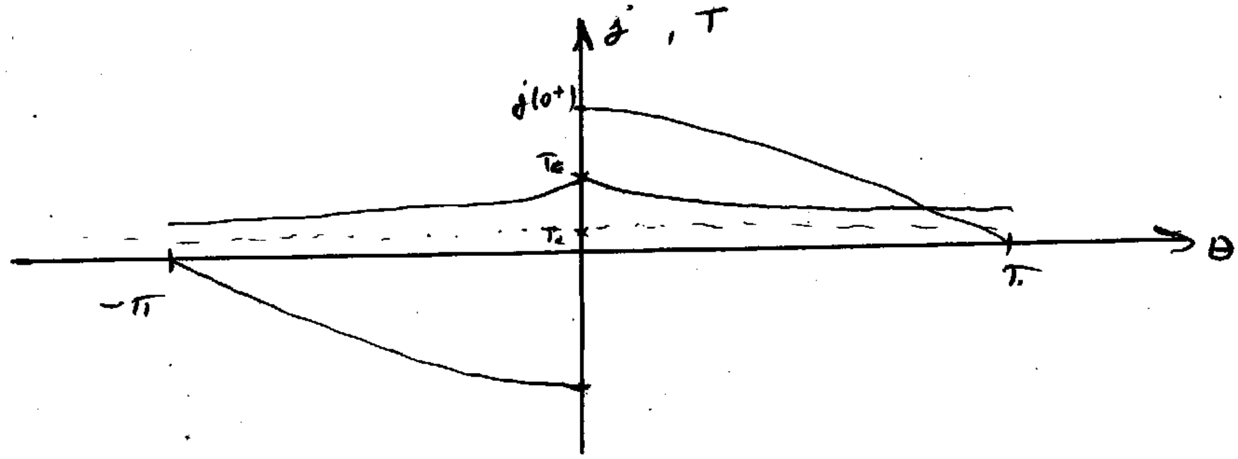
16) $T(\theta) = A e^{-R\theta/a} + B e^{+R\theta/a} + T_e$

17) * $j(-\theta) = -j(\theta)$ par symétrie pour $\theta \in]0;\pi[$.

$\vec{j}$ non définie en 0 donc <u>T non dérivable en 0</u>.

* et $\begin{cases} j(-\pi) = -j(\pi) & \text{par symétrie (voir 2 lignes au dessus)} \\ j(-\pi) = j(\pi) & \text{car c'est le même point !} \end{cases}$

donc $j(\pi)=0$ donc $\underline{\dfrac{dT}{d\theta}(\pi)=0}$



18) $$\boxed{T(\theta > 0) = T_e + \frac{T_c - T_e}{ch\left(\frac{\pi R}{a}\right)} \cdot ch\left(\frac{(\pi - \theta)R}{a}\right)}$$

19) $$\Delta T_i = \frac{T_c - T_e}{ch\left(\frac{\pi R}{a}\right)} \times ch\left(\frac{(\pi - \theta_i)R}{a}\right)$$

donc $$q = \frac{ch\left(\frac{(\pi - \theta_1)R}{a}\right) + ch\left(\frac{(\pi - \theta_3)R}{a}\right)}{ch\left(\frac{(\pi - \theta_2)R}{a}\right)}$$

Or $\theta_1 = \theta_2 - \Delta\theta$ et $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta$

donc (en utilisant $ch(\alpha + \beta) = ch\alpha \cdot ch\beta + sh\alpha \cdot sh\beta$) :

$$\boxed{q = 2 \cdot ch\left(\frac{R\Delta\theta}{a}\right)}$$ q est bien indépendant de grandeurs proposées -

Partie C :

20) $q_{th} = 2,24$ -

21) $\tau_d \sim \frac{(\pi R)^2}{\lambda/\rho c} \simeq 2^h 45$ ordre de grandeur ok -

22) $q_{exp} \simeq 2,26 \pm 0,03$ Fourier devait être très satisfait -

III - Séries de Fourier.

23) On reprend le résultat de la question 14 avec $h = 0$ (aucune perte).

Ainsi,

$$\frac{\rho c}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

24) L'équation devient

$$\frac{\rho c}{\lambda} \cdot f(\theta)\, g'(t) = \frac{1}{R^2} \cdot f''(\theta) \cdot g(t)$$

c'est-à-dire

$\forall t, \theta$
$$\underbrace{\frac{g'(t)}{g(t)}}_{G(t)} = \underbrace{\frac{\lambda . f''(\theta)}{\rho c R^2 . f(\theta)}}_{F(\theta)}$$

25) Si $\underline{\underline{\forall t, \theta}}$ $G(t) = F(\theta)$ alors nécessaire F et G sont constantes.
(démontrez-le...)

$$g'(t) + \frac{g(t)}{\tau} = 0$$: τ est une durée,

si τ était négative, g divergerait quand $t \to \infty$ alors qu'on s'attend (et l'expérience le montre) à ce que T admette une limite quand $t \to \infty$.

26) $\underline{g(t) = e^{-t/\tau}}$ (Je reporte la constante dans f...)

27) f vérifie $$f'' + \frac{\rho c R^2}{\lambda . \tau} f = 0$$

soit encore $$f'' + \left(\frac{R}{d}\right)^2 . f = 0$$

dont les solutions s'écrivent
$$\underline{f(\theta) = \alpha . \cos\left(\frac{R\theta}{d}\right) + \beta \sin\left(\frac{R\theta}{d}\right)}$$

28) $T(-\theta, t) = T(\theta, t) \iff f$ est paire $\iff \beta = 0$

$j(\pi, t) = 0 \iff f'(\pi) = 0 \iff \sin\left(\frac{\pi R}{d}\right) = 0$

$\iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{R}{d} = n$

Donc $$\underline{T_n - T_\infty = A_n . \cos(n\theta) . e^{-t/\tau_n}}$$ (α est "devenu" A_n)

$\frac{R}{d} = n$ donc $R^2 = n^2 . \frac{\lambda \tau_n}{\rho c}$ c'est-à-dire $$\tau_n = \frac{\rho c R^2}{\lambda . n^2}$$

29) L'argument attendu est ~~la~~ la linéarité de l'équation de la chaleur : toute combinaison linéaire de solutions est solution. (Ce n'est pas le lieu de s'embarrasser avec la convergence des séries ...).

$$T(\theta,t) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\theta)\, e^{-t/\tau_n}$$

vérifie $T(\theta, 0) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\theta)$

ssi $A_n = a_n$ $(\forall n)$.

Elle est également paire en θ et $j(\pi)$ est toujours nul.

↳ Toutes les conditions sont vérifiées.

30) On peut obtenir les A_n si on sait décomposer $T_0(\theta)$ en série de Fourier. Ici, cela donnerait

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(T_0(\theta) - T_\infty\right) \cdot \cos(n\theta)\, d\theta \quad \ldots$$

31) $\tau_1 = 16\,\text{min}\,34\,\text{s}$; $\tau_2 = \dfrac{\tau_1}{4}$; $\tau_3 = \dfrac{\tau_1}{9}$

$\tau_n = \dfrac{\tau_1}{n^2}$ décroissance "rapide".

32) Fourier constate que peu de temps après le début de l'exp$^{\text{ce}}$, seul le fondamental compte encore. Peu de temps $= t \gg \tau_2 \sim 4\,\text{min}$.