

A. Equation de diffusion :

19. • cf. cours

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0 \quad : \text{bilan d'énergie en l'absence de toute source.} \\ j_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad : \text{loi de Fourier.} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

• θ n'est solution que si $k = \frac{1}{2}$.

B. Flux thermique constant :

20. À $\theta(x,t) = \theta_0 + \frac{b \cdot e^{-u^2}}{\sqrt{\mu t}}$ correspond un vecteur densité de flux thermique

$$\vec{j}_\theta = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \vec{e}_x = -\frac{2b}{\sqrt{\mu t}} \cdot \frac{kx}{\sqrt{\mu t}} \cdot \frac{k}{\sqrt{\mu t}} e^{-u^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{j}_{\theta|_{x=0}} = -\frac{2b k^2}{(\mu t)^{3/2}} \cdot e^{-u^2} \vec{e}_x$$

donc $\vec{j}_\theta(0, t) = -\frac{2b k^2}{(\mu t)^{3/2}} \vec{e}_x$

Cette solution ne correspond pas à la situation posée car $\vec{j}_\theta(0, t)$ devrait être ~~elle-même~~ constante (non nulle) pour $t > 0$.

21. Grâce à la loi de Fourier, on calcule $j_x(x, t)$:

$$j_x(x, t) = -\lambda \cdot \frac{2Bx}{\lambda \sqrt{\mu t}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)$$

or $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{\sqrt{\mu t}}$ et $F'(u) = \frac{-2u e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{erf}(u) - u \cdot \operatorname{erf}'(u)$

Enfin $\operatorname{erf}'(u) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2}$

(dans la suite je conserverai la valeur $\frac{1}{2}$ pour k).

Abs, $j_a(z, t) = B_1 \cdot \text{erfcf}(u) \quad (\text{tous calculs faits})$

22. Conditions aux limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t, j_a(0, t) = j_{a0} \quad \text{done} \quad \boxed{B_1 = j_{a0}} \quad (\text{car } \text{erfcf}(0) = 1) \\ \bullet \forall t, \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0 \quad \text{done} \quad \boxed{A_1 = T_0} \quad (\text{car } \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = 0) \end{array} \right.$$

C - Température constante:

23. $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t, T(0, t) = T_1 \quad \text{done} \quad A_2 + B_2 = T_1 \\ \bullet \forall t, \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0 \quad \text{done} \quad \boxed{A_2 = T_0} \end{array} \right.$

Abs, $\boxed{B_2 = T_1 - T_0}$

Remarque: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{t \rightarrow 0} T(x, t) \right) = T_0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} T(x, t) \right) = T_1 \end{array} \right.$ les limites ne commutent pas...

24 - $j_a(z, t) = \lambda(T_1 - T_0) \cdot \frac{2e^{-u^2}}{\sqrt{\pi} \mu t}$

$\lim_{t \rightarrow 0} j_a(z, t) = 0$: ok! car à $t=0$, $T = T_0 \forall x > 0$

$\lim_{t \rightarrow \infty} j_a(z, t) = 0$: ok! Régime établi - $(T(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_1)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} j_a(z, t) = 0$: ok! car l'infini c'est loin...

↳ Je ne vois rien de gênant dans cette expression.

D - Modélisation d'une opération de perçage:

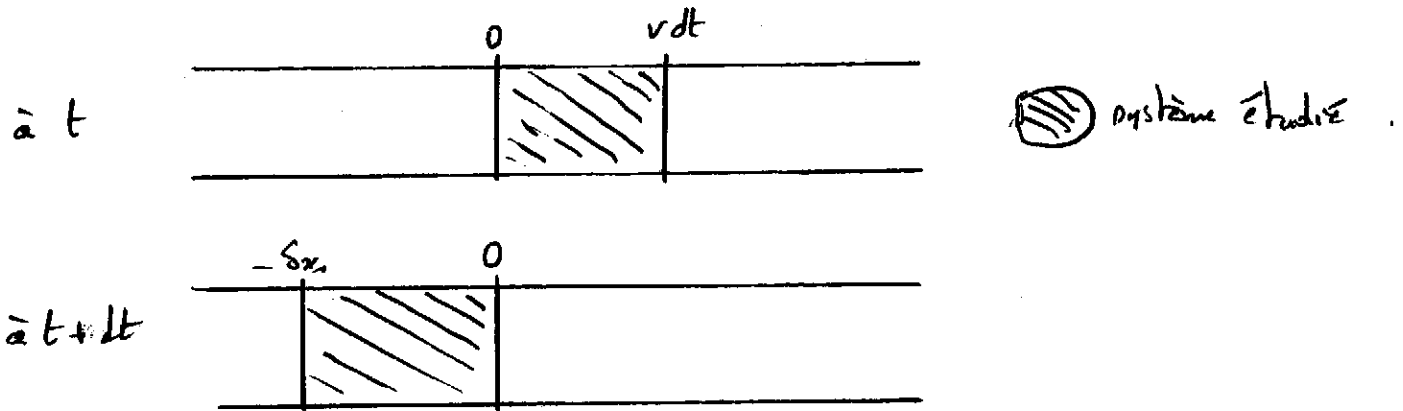
25. On utilise les résultats de la partie II.B car tant que la fusion n'a pas lieu, le flux en $x=0$ est constant.

On cherche t_f tq $T(0, t_f) = T_f$

done $\frac{2j_{a0} \sqrt{\mu t_f}}{\lambda \sqrt{\pi}} = T_f - T_0$

donc $t_f = \frac{\pi}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda(T_f - T_0)}{2j_{a0}} \right)^2 \quad \left| \quad t_f = 63 \text{ ms} \right.$
 $(j_{a0} = \frac{P_2}{\sigma})$

26. Écrivons un bilan énergétique pour le système fermé contenu à l'instant t entre les abscisses $x=0$ et $x=v dt$.
 À l'instant $t+dt$, ce système se trouve entre les abscisses $x=-\delta x$ et 0



- À t , le système est à l'état solide ; à $t+dt$, il est liquide.

$$\left(\delta x = \underbrace{\frac{v_{liq}}{v_{sol}}}_{\text{rapport des volumes massiques}} \cdot v dt \right)$$

- L'évolution de ce système étant isobare (équilibre diphasé à T_f), on a

$$H(t+dt) - H(t) = \delta Q$$

donc

$$\underbrace{\rho \cdot S \cdot v dt}_{\text{masse du système}} \times L_f = \underbrace{j_{\lambda 0} S dt}_{\substack{\text{apportée à gauche} \\ \text{(liquide transparent} \\ \text{au laser)}}} - j_{\lambda}(v dt) S dt$$

dt étant infiniment petit, on ne garde que les termes d'ordre 1 :

$$\rho \cdot v dt \cdot L_f = j_{\lambda 0} dt - j_{\lambda}(0) dt$$

donc

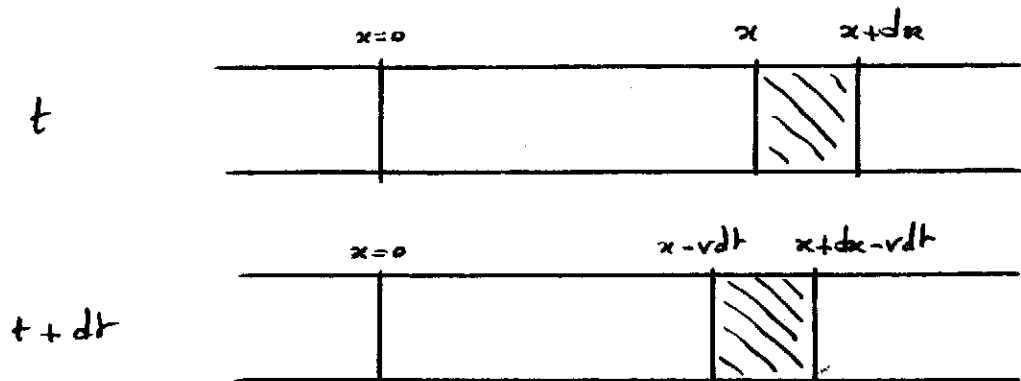
$$\rho v L_f = j_{\lambda 0} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$$

donc

$$v = \frac{j_{\lambda 0} + \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)}{\rho \cdot L_f}$$

27. - Considérons le système formé compris à l'instant t entre les abscisses x et $x+dx$. ($x > 0$: système solide) (4)

. À $t+dt$, ce système se trouve entre les abscisses $x-vdt$ et $x+dx-vdt$.



Un bilan énergétique s'écrit :

$$dH = \delta Q \quad (\text{on écrit } dU = \delta Q \text{ ; ici, peu de différence ...})$$

$$\rho c \left(T(x-vdt) - T(x) \right) S dx = j_a(x) S dt - j_a(x+dx) S dt$$

donc $\rho c \times (-v \cdot dt \cdot \frac{dT}{dx}(x)) S dx = - \frac{dj_a(x)}{dx} \cdot dx S dt$

donc $\rho c \cdot v \frac{dT}{dx} = - \lambda \cdot \frac{d^2 T}{dx^2}$

donc $\boxed{\frac{dT}{dx} = - \gamma \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\mu}{v}}$

28. - $T(x) = T_0 + (T_f - T_0) \cdot e^{-\frac{v \cdot x}{\mu}}$ est la solution du problème.

29. - On utilise le résultat de la question 26 ; Par ailleurs, $j_{a0} = \frac{P_e}{\sigma}$

donc $v = \frac{1}{\rho \cdot L_f} \left(\frac{P_e}{\sigma} + \frac{v \lambda}{\mu} \cdot (T_0 - T_f) \right)$

donc $\boxed{v = \frac{P_e / \sigma}{L_f + c \cdot (T_f - T_0)}} \quad \text{A.N: } \underline{v = 1,95 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}$
 Valeur qui me semble réaliste !