

[Corrigé]

Problème 1: Quelques aspects du phénomène de résonance.

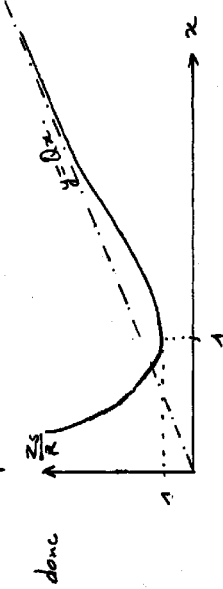
Partie I:

A1) $Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ (association série)

A2) $Z_s = |Z_s|$ donc $Z_s = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = R \sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}$

$\varphi = \arg(Z_s)$ donc $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$

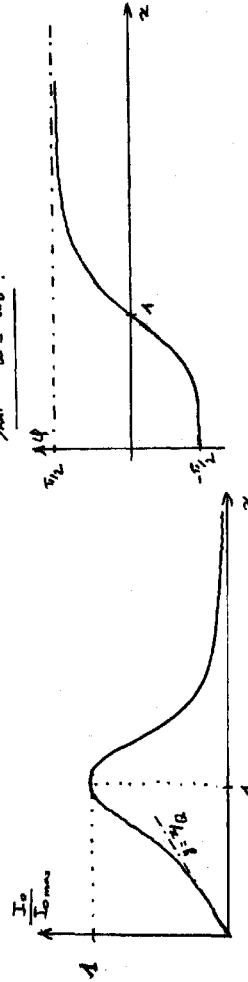
A3) $\frac{Z_s}{R} = \sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$



A4) $E_0 = Z_s \cdot I_0$ (loi d'Ohm en module)

donc $I_0 = \frac{E_0}{Z_s}$; E_0 étant fixé, Z_{smin} vaut R

On en déduit $I_{0max} = \frac{E_0}{R}$
 soit $\omega = \omega_0$.



A5) $I_0(\omega) \geq \frac{I_{0max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{R\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}} \geq \frac{E_0}{R\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq Q\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{Q} - 1 \leq 0$ et $x^2 + \frac{x}{Q} - 1 \geq 0$

Tous calculs faits, on obtient:

$\frac{1}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1+4Q^2} \right) \leq x \leq \frac{1}{2Q} \left(1 + \sqrt{1+4Q^2} \right)$

Donc $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ avec $\begin{cases} \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1+4Q^2} \right) \\ \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{1+4Q^2} \right) \end{cases}$

Donc $A \triangleq \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

De plus, $\omega \mapsto \varphi(\omega)$ est monotone et $\varphi(\omega_1) = -\frac{\pi}{4}$; $\varphi(\omega_2) = \frac{\pi}{4}$
 donc $\omega \in [\omega_1; \omega_2] \Rightarrow \varphi(\omega) \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$

B1) $Z_p = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$ d'après la loi d'association des impédances.

B2) $Z_p = \frac{R}{j\omega C} \left(1 + j\frac{\omega L}{R} \right)$ donc $Z_p = \frac{R^2 Q \omega_0}{j\omega Z_s} \left(1 + j\frac{Q\omega}{\omega_0} \right)$

B3) si $\frac{Q\omega}{\omega_0} \gg 1$ alors $Z_p \approx \frac{R^2 Q \omega_0}{j\omega Z_s} \cdot j\frac{Q\omega}{\omega_0}$ soit $Z_p \approx \frac{R^2 Q^2}{Z_s}$

B4) $Z_p(\omega_0) = \frac{R^2 Q^2}{R} = Q^2 R$

$Z_p(\omega_0) \in \mathbb{R}$ et $Z_p(\omega_0) \gg R$.

L'intensité ($i_c + i_L$) sera alors en phase avec la tension E et aura une amplitude $\frac{E_0}{Q^2 R} \ll \frac{E_0}{R}$; on parle de circuit "bouchon".

B5) $i_c = j\omega C E$ donc $i_c(t) = C\omega E_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
 donc $i_c(t) = -C\omega E_0 \sin(\omega t)$

Si $\omega = \omega_0$ alors, $C\omega = C\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0} = \frac{1}{QR}$ et $i_c(t) = -\frac{E_0}{QR} \sin(\omega_0 t)$

$i_c + i_L = \frac{E}{Z_p}$ donc $i_c + i_L = \frac{Z_s E}{Q^2 R^2}$

Si $\omega = \omega_0$, alors $Z_s = R$ donc $i_c(t) + i_L(t) = \frac{E_0 \cos(\omega_0 t)}{Q^2 R}$

On en déduit $i_L(t) = \frac{E_0}{QR} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0 t}{Q} \right)$

Si $Q \gg 1$, $i_L(t) \approx \frac{E_0}{QR} \sin(\omega_0 t)$ donc $i_L(t) + i_c(t) \approx 0$ (on obtient le "bouchon").

Partie II:

A). $V_s = V_E$; $V_- = \frac{P}{P+Q} V_E$

En régime linéaire, $V_+ = V_-$ donc $\frac{V_E}{V_E} = 1 + \frac{Q}{P}$

- $I_E = 0$ pour un ampli-op. idéal.

B). I_E étant nulle et $I_E = \frac{1}{R_E} V_E$, on déduit que $\frac{1}{R_E} = 0$

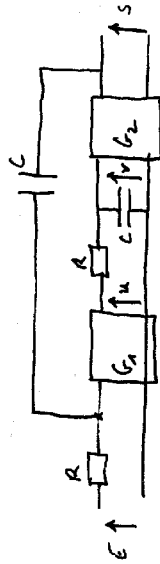
La résistance d'entrée est "infinie".

- Si l'ampli-op est idéal, $V_S = G_1 V_E$ pour toute valeur de I_S

donc $R_S = 0$

Par identification avec le résultat de la question précédente, $G = 1 + \frac{Q}{P}$

Cd) Reproduisons le schéma pour introduire deux tensions u et v :



Compte-tenu des valeurs de résistances d'entrée et de sortie déterminées ci-dessus,

$$u = G_1 \cdot \frac{\frac{E}{R} + j\omega s}{\frac{1}{R} + j\omega} ; v = \frac{\frac{u}{R}}{\frac{1}{R} + j\omega} ; s = G_2 \cdot v$$

En utilisant la notation $\alpha = R\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, il vient :

$$u = G_1 \cdot \frac{E + j\alpha s}{1 + j\alpha} ; v = \frac{u}{1 + j\alpha} ; s = G_2 v$$

dont on déduit :

$$H = \frac{G_1 G_2}{1 + (2 - G_1 G_2)j\alpha + (j\alpha)^2} ; G_1 = 1 \text{ donc } H = \frac{G_2}{1 + (2 - G_2)j\alpha + (j\alpha)^2}$$

C2)

$$H(z) = \frac{G_2}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (2-G_2)^2 z^2}}$$

Soit ε tel que $G_2 = 2 - \varepsilon$. L'énoncé précise que ε est positif et "voisin de 0".

Soit y telle que $H(z) = \frac{G_2}{\sqrt{y(z)}}$. Alors $H'(z) = -\frac{y'(z)}{2 y(z)^{3/2}}$.

$y(z)$ étant positif, on en déduit que H' est du signe de $-y'$.

Calculons y' : $y'(z) = 2z \cdot (\varepsilon^2 - 2 + 2z^2)$

Alors, $y'(z) \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}}$ qui est définissi : $\varepsilon \leq \sqrt{2}$.

Donc y présente un minimum en $z_m = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}}$

Donc H présente un maximum en $z_m = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}} \approx 1$ (par essai)

calculons $y(z_m)$:

$$y(z_m) = \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

Donc $H_{\max} = \frac{G_2}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} \approx \frac{G_2}{\varepsilon}$

Calcul de A :

$$H(z) \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{G_2}{\sqrt{y(z)}} \geq \frac{G_2}{\sqrt{2} \cdot \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow y(z) \leq 2\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow z^4 - (2 - \varepsilon^2)z^2 + 1 - 2\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \leq 0$$

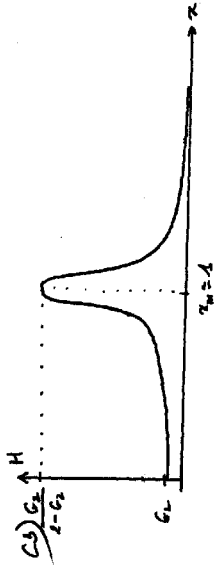
$$\Leftrightarrow z \in [z_1; z_2] \text{ avec}$$

$$\begin{cases} z_1 = 1 - \varepsilon_2 + o(\varepsilon) \\ z_2 = 1 + \varepsilon_2 + o(\varepsilon) \end{cases}$$

Donc $z_2 - z_1 \stackrel{df}{=} A = \varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$

Explicitement, $A \approx 2 - G_2$ pour G_2 suffisamment proche de 2.

L'acuité de la résonance est contrôlée par le gain G_2 .



c4) $E = 2 - G_2 = 0,2$ Les approximations précédentes sont valides à environ 5% près. (on a négligé E^2 devant 1...)

• Etude temporelle: s est solution de

$$\ddot{s} + 0,2\omega_0 \dot{s} + \omega_0^2 s = 1,8\omega_0^2$$

L'Equation caractéristique nous renseigne sur le régime libre de ce système - Ses racines sont :

$$r_1 \approx -\frac{\omega_0}{10} - j\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = r_1^* \quad (\text{conjugées conjuguées})$$

↳ Le temps caractéristique de réponse du système est donc $\frac{10}{\omega_0} \approx 1 \text{ s}$.

↳ La pseudo-période associée est $\frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0,6 \text{ s}$.

Compte tenu de la période $T = 1 \text{ ms}$ du signal, nous pouvons conclure :

Sur chacun des intervalles de temps sur lesquels e est constante, le signal de sortie amorcera des oscillations pseudo-périodiques. Toutefois, ces intervalles sont tellement courts devant la pseudo-période et le temps d'amortissement qu'il ne sera pas évident de reconnaître ce régime...

• Etude fréquentielle: Elle fournit ici, à peu de frais, d'obtenir une information plus quantitative.

• Distinguons des autres la composante spectrale de fréquence nulle, $\langle E \rangle = \frac{T_0}{T} E_0$. Celle-ci est transmise par le filtre avec un gain $H(0) = G_2$.

• Concernant le reste du spectre de $E(t)$:

l'ensemble des fréquences à considérer est $\left\{ \frac{n}{T} / n \in \mathbb{N} \right\}$

soit $F = \left\{ 1000 n \text{ Hz} / n \in \mathbb{N} \right\}$.

On fréquences sont à comparer à la fréquence propre $\frac{\omega_0}{2\pi} = 46 \text{ Hz}$ du filtre.

Donc $\forall f \in F, \frac{2\pi f}{\omega_0} > 120 \gg 1$

$$\text{Donc } \forall f \in F, H(j2\pi f) \approx \frac{G_2}{(j\frac{2\pi f}{\omega_0})^2}$$

On en déduit la fonction de "double intégrateur" que nous étudierons pour cette partie de $E(t)$. (à savoir $E(t) - \langle E \rangle$...)

Donc

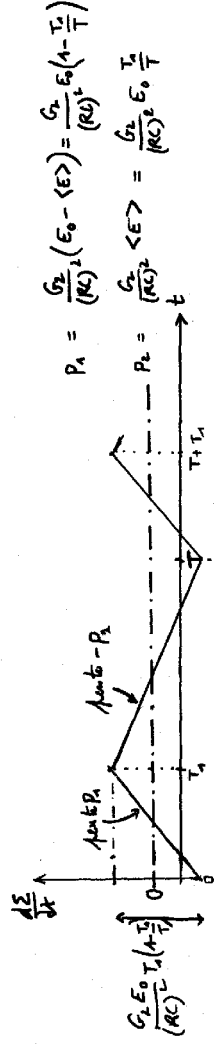
$$s(t) = G_2 \langle E \rangle + \Sigma(t)$$

avec $\Sigma(t)$ telle que :

$$\langle \Sigma \rangle = 0$$

$$\langle \frac{d\Sigma}{dt} \rangle = 0$$

$$\bullet \quad \frac{d\Sigma}{dt}(t) = \frac{G_2}{(RC)^2} \int_0^t (E(t') - \langle E \rangle) dt' + \frac{d\Sigma}{dt}(0)$$



et

