

Preliminaire:

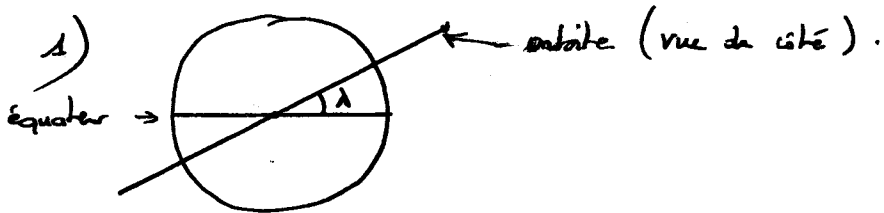
1) cf. cours : $v^2 = \frac{GM}{r}$

2) $T = \frac{2\pi r}{v}$; $v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

3) Kepler : $\forall$ satellite, $\frac{a^3}{T^2} = \text{cte}$ où $a \hat{=}$ $\frac{1}{2}$ grand-axe de l'ellipse trajectoire.

Pour un cercle, $a = r$ d'où la compatibilité.

I - Station Nir:



Sur ce schéma, on remarque que l'inclinaison λ cherchée est aussi la latitude maximale atteinte par la projection de la trajectoire sur la surface terrestre.

$\lambda \simeq \lambda_{\text{Paris}}$; ordre de grandeur : $\lambda \simeq 50^\circ$.

2) En une période de révolution du satellite, la Terre a tourné sur elle-même d'un angle égal à la différence de longitude entre deux points d'intersection de l'équateur et de deux projections successives de l'orbite.

Connaissant les longitudes de Paris et de New-York, on en déduit, par linéarité (la Terre tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire constante), la période du satellite :

$T = T_T \cdot \frac{\Delta l}{2\pi}$; $\Delta l = 23^\circ 52'$ différence de longitude évoquée plus haut...

A.N: $T \simeq 5700 \text{ s} \simeq 1 \text{ heure } 35 \text{ min.}$

$$3) \text{ On a } r^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2 \text{ d'où } r \approx 6908 \text{ km}$$

(2)

Ait une altitude d'environ 530 km.

II

$$1) * T_m = 2\pi \sqrt{\frac{r_m^3}{GM}} = 5550 \text{ s} \quad (r_m = R_T + z_0)$$

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{r_p^3}{GM}} = 5310 \text{ s} \quad (r_p = R_T + z_1)$$

* Soit θ_p l'angle repérant la position de Progress sur son orbite :

$$\theta_p = \pi + \frac{2\pi}{T_p} t \quad (\text{origine à la position initiale de Nir})$$

De même, on a

$$\theta_n = \frac{2\pi}{T_n} t \quad \text{from Nir}$$

$$\theta_p - \theta_n = \pi + 2\pi t \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_n} \right)$$

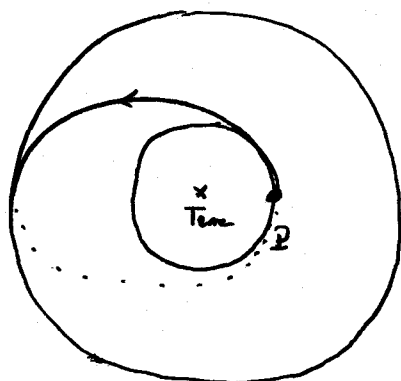
La période T cherchée est la plus petite valeur strictement positive de t pour laquelle $\theta_p - \theta_n \equiv \pi [2\pi]$ (opposition de phase)

$$\text{i.e. } 3\pi = \pi + 2\pi T \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_n} \right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{T_p T_n}{T_n - T_p} = 1,23 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 1 \text{ jour } 10 \text{ heures}$$

$$* t_1 \text{ est tel que } (\theta_p - \theta_n)(t_1) = 2\pi$$

$$\text{d'où } t_1 = \frac{T}{2} = 17,1 \text{ heures}$$



• Passage de l'orbite d'altitude z_1 à l'orbite de transfert: (3)

$$E_{\text{avant}} = - \frac{GMm}{2r_p} \quad (r_p = R + z_1).$$

$$E_{\text{après}} = - \frac{GMm}{2a} \quad \text{où } a \text{ est le demi-grand axe de l'orbite de transfert: } a = \frac{1}{2}(r_p + r_n).$$

$$\Delta E = - GMm \left[\frac{1}{r_p + r_n} - \frac{1}{2r_p} \right].$$

$$\Delta E = GMm \frac{r_n - r_p}{2r_p(r_n + r_p)}$$

Cette variation d'énergie est, par hypothèse, purement cinétique d'où

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{GMm}{2r_p} \cdot \frac{r_n - r_p}{r_n + r_p} > 0 \quad ; \quad \Delta v \ll v \text{ donc } \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \Delta v$$

$$\text{donc } \underline{\Delta v = 58 \text{ m.s}^{-1}}$$

• Passage de l'orbite de transfert à l'orbite d'altitude z_0 :

De la même manière, on obtient :

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{GMm}{2r_n} \cdot \frac{r_n - r_p}{r_n + r_p} > 0$$

$$\text{donc } \underline{\Delta v = 29 \text{ m.s}^{-1}}$$

3) 5^e loi de Kepler: $T'^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{GM}$ et $a = \frac{r_p + r_n}{2}$

$$\text{donc } \underline{T' = \pi \sqrt{\frac{(r_p + r_n)^3}{2GM}}} = 5430 \text{ s} \approx 1 \text{ heure } 30 \text{ min}$$

* Rencontre à l'instant $t_2 + \frac{T'}{2}$ entre Progue et Nir:

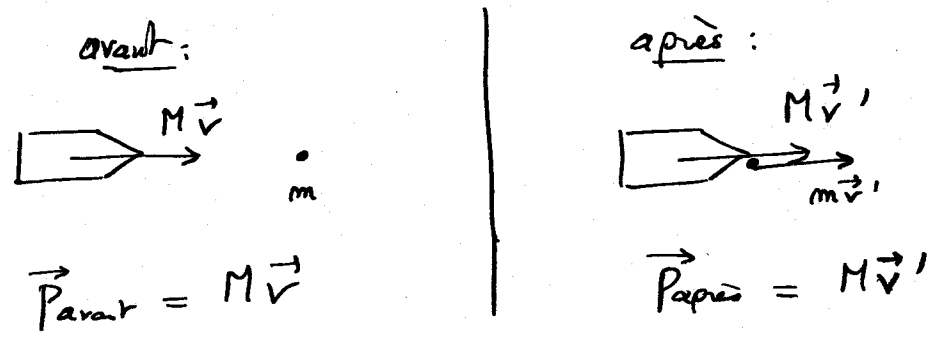
$$\text{donc } (\theta_p - \theta_n)_{(t_2)} - \pi \equiv \frac{2\pi}{T_n} \cdot \frac{T'}{2} \quad [2\pi].$$

la date solution la plus petite est:

$$\underline{t_2 = t_1 + \frac{T'}{T_n}} = 6.10^4 \text{ s} \approx 16 \text{ h } 41 \text{ min}$$

III

1)



La conservation de la quantité de mouvement au cours du choc s'écrit:

$$(M + m)\vec{v}' = M\vec{v} \quad \text{donc} \quad \vec{v}' = \frac{M}{M+m}\vec{v}$$

Soit $\vec{P}_{\text{apres}} - \vec{P}_{\text{avant}} = M\vec{v}\left(\frac{M}{M+m} - 1\right)$

$$\vec{P}_{\text{apres}} - \vec{P}_{\text{avant}} = \frac{-Mm}{M+m}\vec{v}$$

Avec $m \ll M$, on a $\vec{P}_{\text{apres}} - \vec{P}_{\text{avant}} = -m\vec{v}$

2) Entre t et $t+dt$, toutes les molécules se trouvant dans un cylindre de volume $S v(t) dt$ vont subir un choc avec l'engin.

Chacun de ces chocs engendre une variation $-m\vec{v}$ de la quantité de mouvement de l'engin.

Ainsi, entre t et $t+dt$, la variation $d\vec{p}$ de la quantité de mouvement de l'engin est:

$$d\vec{p} = (S v(t) dt \times n) \times (-m\vec{v}) \quad \text{où } n \text{ est le nbre de molécules par unité de volume}$$

$$n = \frac{\mu}{m}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\mu S v \vec{v}$$

La 2^e loi de Newton $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ permet d'identifier $\vec{F}$:

$$\underline{\underline{\vec{F} = -\mu S v \vec{v}}}$$

(5)

3) * Soit $\vec{r}$ le vecteur position de M.

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (\text{mouvement plan repéré en coordonnées polaires}).$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Si $|\dot{r}| \ll |r \dot{\theta}|$, (mouvement quasi-circulaire) alors

$$\vec{v} \simeq r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + (\dots) \vec{e}_\theta$$

le PFD indique alors (selon $\vec{e}_r$):

$$M r \dot{\theta}^2 = \frac{G M_T M}{r^2} \quad \text{donc} \quad \frac{v^2}{r} \simeq \frac{G M_T}{r^2}$$

$$\text{donc} \quad v \simeq \sqrt{\frac{G M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + z}}$$

* Théorème de l'énergie mécanique:

$$dE = \delta W(\vec{F})$$

$$dE = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\underline{dE = -\mu S v^3 dt} \quad (dE = -k v^3 dt)$$

$$+ \quad E = -\frac{G M m}{2r} \quad (\text{trajectoire circulaire})$$

$$\text{soit} \quad E_c - \frac{G M m}{r} = -\frac{G M m}{2r}$$

$$\text{d'où} \quad E_c = \frac{G M m}{2r} = -E$$

$$\text{Ainsi,} \quad \underline{dE_c = -dE}$$

Commentaire: | les frotts dissipent l'énergie mécanique ($dE < 0$) et sont donc responsables d'une augmentation de la vitesse de l'engin ($dE_c > 0$)

$$* \quad \frac{dE_c}{dt} = \mu S v^3 \quad \text{donc} \quad M v \frac{dv}{dt} = \mu S v^3$$

$$\text{donc} \quad M \frac{dv}{dt} = \mu S v^2$$

$$Or \quad v = \sqrt{\frac{G\pi_T}{R_T + z}} \approx \sqrt{\frac{G\pi_T}{R_T}} \left(1 - \frac{z}{2R_T}\right) \quad (z \ll R_T) \quad (6)$$

d'où l'expression (approchée) demandée :

$$M. \sqrt{\frac{G\pi_T}{R_T}} \left(\frac{-1}{2R_T} \frac{dz}{dt} \right) = \mu S. \frac{G\pi_T}{R_T} \left(1 - \frac{z}{R_T}\right) \quad \left(\text{à l'ordre 1 en } \frac{z}{R_T} \right)$$

$$\text{donc} \quad \underline{\underline{\frac{dz}{dt} = \frac{2\mu S. \sqrt{G\pi_T R_T}}{M} \left(\frac{z}{R_T} - 1 \right)}}$$

$$Or \quad \mu = \mu(z_0) \cdot e^{-\frac{z-z_0}{H}} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\mu(z_0)S. \sqrt{G\pi_T R_T}}{M} e^{-\frac{z-z_0}{H}} \left(\frac{z}{R_T} - 1 \right)$$

$$\underline{\underline{\frac{dz}{dt} = \frac{H}{\tau} \cdot e^{-\frac{z-z_0}{H}} \cdot \left(\frac{z}{R_T} - 1 \right)}}$$

On peut en extraire la durée dt nécessaire à une variation dz de l'altitude au voisinage de z :

$$dt = \tau \cdot \frac{1}{H} \cdot \frac{dz}{\frac{z}{R_T} - 1} e^{\frac{z-z_0}{H}}$$

En intégrant :

$$t_2 - t_0 = \frac{\tau}{H} \int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{\frac{z}{R_T} - 1} e^{\frac{z-z_0}{H}}$$

Pb: l'intégrande n'a pas de primitive analytique...

On va estimer la durée $t_2 - t_0$ en limitant le développement en série à l'ordre 0 (nous avons choisi l'ordre 1...)

$$\text{Ainsi} \quad \frac{z}{R_T} - 1 \approx -1 \quad (z \ll R_T !)$$

On en déduit alors :

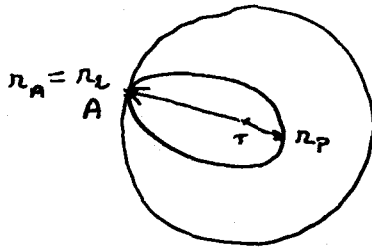
$$t_2 - t_0 = \frac{\tau}{H} \int_{z_2}^{z_0} dz \cdot e^{\frac{z-z_0}{H}} \quad (7)$$

$$t_2 - t_0 = \tau \cdot \left(1 - e^{\frac{z_2 - z_0}{H}} \right) = 5,5 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 63 \text{ jours } 20 \text{ heures.}$$

(correspond à peu près à la durée donnée dans l'énoncé : du 27/01 au 23/03)

IV

*



orbite circulaire : $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T M}{r_2} = - \frac{G M_T M}{2 r_2}$ donc $v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_2}}$

orbite elliptique : $\frac{1}{2} M \cdot v'(A)^2 - \frac{G M_T M}{r_2} = - \frac{G M_T M}{r_p + r_2}$ donc $v'(A) = \sqrt{\frac{2 G M_T r_p}{r_2 (r_p + r_2)}}$

$$\underline{v'(A) - v = -7,5 \text{ m.s}^{-1}}$$

* Allumage des réacteurs en A pour la 1^{re} et la 2^e manœuvre.