

$$I) 1a) \overline{S_1 F_P} = \frac{\overline{S_1 C_1}}{2} = -15 \text{ m} \quad (\text{orientation } > 0 \text{ dans le sens de la lumière incidente})$$

$$1b) \overline{S_2 F_C} = \frac{\overline{S_2 F_P} \cdot \overline{S_2 F_2}}{\overline{S_1 F_P} - \overline{S_2 F_2}} = 9,6 \text{ m} \quad (\text{relation de conjugaison})$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{\overline{S_1 F_C} = 0,6 \text{ m}}}$$

II a) * Diffraction à l'infini :

• source à l'infini : c'est le cas car les étoiles sont éloignées du télescope d'une distance incommensurablement plus grande que toute autre distance intervenant dans le problème.

• observation à l'infini : ceci est équivalent à une observation dans le plan focal image d'une lentille convergente car en chaque point d'un tel plan se rencontrant les rayons ayant été diffractés dans une même direction.

* $2\pi(ux + vy)$ représente le déphasage entre une onde secondaire issue du point (x, y) et une onde issue du point $(0, 0)$; le couple (u, v) caractérise un point donné du plan d'observation.

* $e^{2i\pi ux}$ est une fonction de x périodique dont la période est $\frac{1}{u}$; u est donc une fréquence relative à la variable spatiale x . (Idem pour v et y)

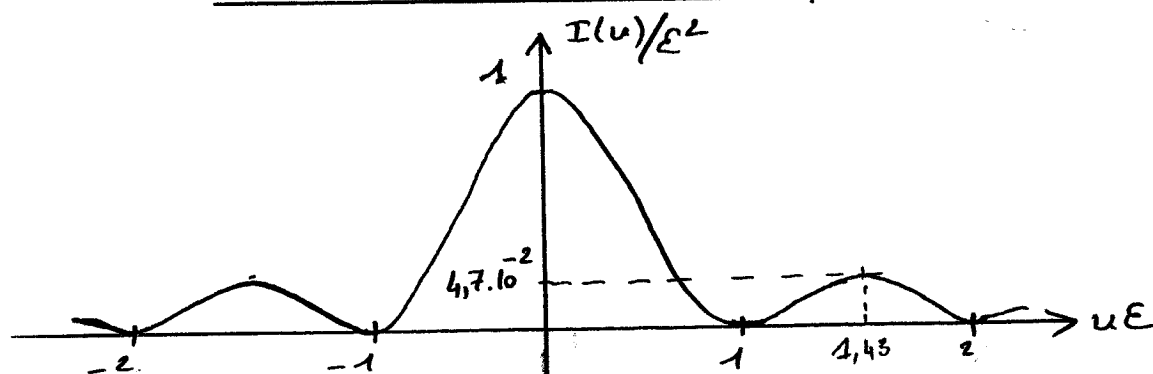
b) la fente est infiniment allongée selon Oy donc il n'y aura aucun effet de diffraction selon Oy . La répartition de l'intensité selon Oy sera celle que donne l'optique géométrique à savoir $I(x, y) = 0$ si $y \neq 0$.

Dans le plan $(X, 0)$, on aura

(2)

$$\psi(u) = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} e^{-2i\pi ux} dx = \epsilon \cdot \text{sinc}(\pi u \epsilon)$$

Donc $I(u) = \epsilon^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi u \epsilon)$



c) $u = \frac{X}{\lambda f'}$ donc $\Delta X = \lambda f' \Delta u$

$\Delta X = \lambda f' \cdot \frac{2}{\epsilon} \approx 0,22 \text{ mm}$

$\frac{\Delta X}{f'} \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \approx 1,8 \text{ H}'' = 1871 \frac{\text{m}''}{\text{milliseconde}}$

III

a) On aura $\psi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u)$

Avec $\psi_1(u) = \int P(x) e^{-2i\pi ux} dx = \epsilon \cdot \text{sinc}(\pi u \epsilon)$ (I.b)

et $\psi_2(u) = \int P(x+a) e^{-2i\pi ux} dx = e^{2i\pi ua} \psi_1(u)$

D'où $\psi(u) = (1 + e^{2i\pi ua}) \epsilon \cdot \text{sinc}(\pi u \epsilon)$

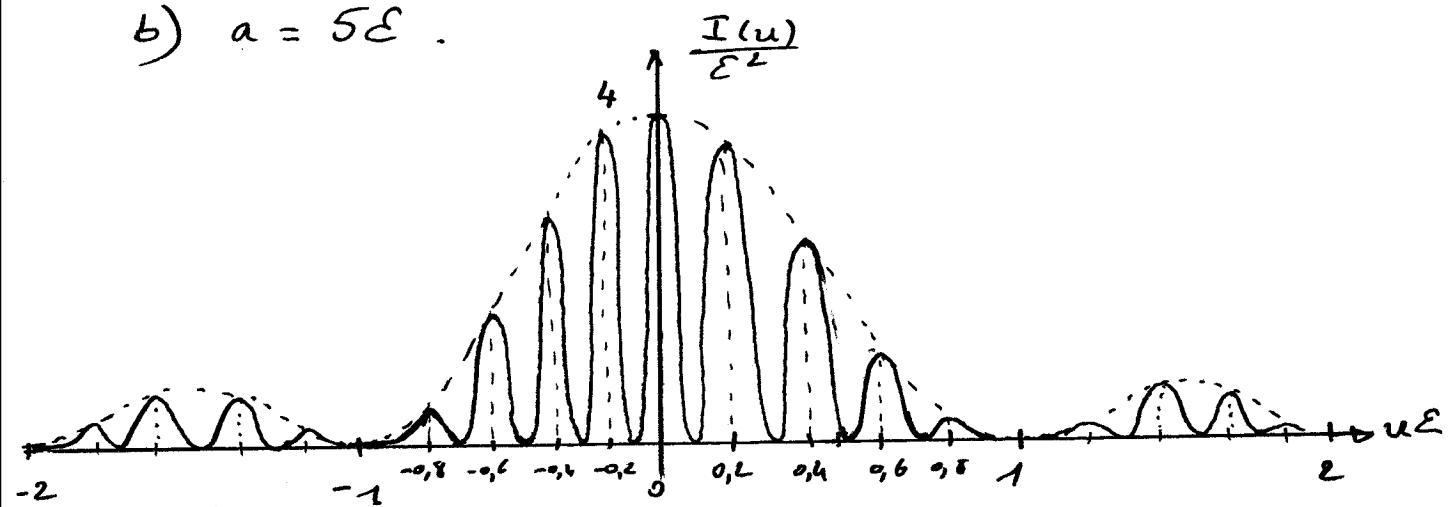
On en déduit l'intensité :

$I(u) = \psi(u) \cdot \psi^*(u)$

$I(u) = 2(1 + \cos(2\pi ua)) \cdot \epsilon^2 \text{sinc}^2(\pi u \epsilon)$

b) $a = 5\epsilon$.

(3)



interfrange angulaire : $i = \frac{\lambda}{a} = 187,1 \text{ m}''$

$\Delta x = \frac{\lambda a}{\epsilon} i = 10 i$ soit 10 franges à l'intérieur de la tache centrale.

c) $\frac{\epsilon}{a} = \frac{\lambda i}{\Delta x}$ d'où $\frac{\epsilon}{a} \rightarrow 0$ donc $\frac{i}{\Delta x} \rightarrow 0$

Il y aura un grand nombre de franges à l'intérieur de la tache centrale de diffraction.

Analytiquement, on peut écrire :

$\forall u, \quad \epsilon^2 \text{sinc}^2(\pi u \epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1$

d'où $I(u) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon (1 + \cos(2\pi u a))$

⇒ la diffraction ne vient plus moduler la figure d'interférences.

IV -

$\epsilon \ll a$ donc on négligera l'effet de la diffraction sur la répartition de l'intensité.

a) Soit I_1 la contribution de E_1 à l'intensité dans le plan d'observation. Il s'agit d'une interférence entre 2 ondes déphasées de

$$\varphi_1(m) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (E_1 F_1 \Pi - E_1 F_2 \Pi)$$

$$\varphi_1(m) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2} - x_{s1}\right)^2 + D_s^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2} + x_{s1}\right)^2 + D_s^2} + \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + f^2} - \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + f^2} \right)$$

On a de manière évidente $a \ll D_s$, $x_s \ll D_s$

(4)

De plus, on peut supposer raisonnablement que $a \ll f$ et $x \ll f$

(Car $f = 24 \text{ m}$ et au c) on donne $a \approx 116 \text{ cm}$
et l'image dans le plan focal n'aura pas 24 m de côté!
(conditions de Gauss!))

D'où

$$\phi_1(n) \approx -\frac{2\pi}{\lambda} \left(+ \frac{ax_s}{D_s} + \frac{ax}{f} \right)$$

D'après la formule d'interférences à 2 ondes, l'intensité est proportionnelle à $|1 + e^{i\phi_1(n)}|^2$ (cf III a) c'est-à-dire :

$$I_1 = 2I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_s}{D_s} + \frac{x}{f} \right) \right) \right)$$

De même,

$$I_2 = 2I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(-\frac{x_s}{D_s} + \frac{x}{f} \right) \right) \right)$$

b) L'intensité deviendra uniforme si les systèmes de franges relatifs à E_1 et E_2 sont décalés, l'un par rapport à l'autre, d'un demi-interfrange i.e si

$$\phi_2(n) - \phi_1(n) = \pi$$

donc si $\frac{4\pi a x_s}{\lambda D_s} = \pi$

donc si $a \equiv a_1 = \frac{\lambda D_s}{4x_s}$

Or $\theta = \frac{2x_s}{D_s}$ d'où $a_1 = \frac{\lambda}{2\theta}$

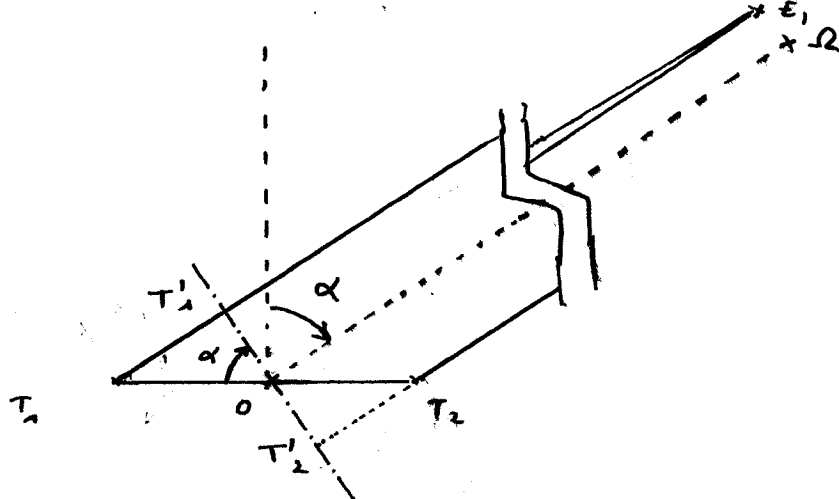
c) On a $I = I_1 + I_2$ (E_1 et E_2 non corrélées)

soit $I = 4I_s \left(1 + \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x_s}{D_s} + \frac{x}{f} \right) \right) + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(-\frac{x_s}{D_s} + \frac{x}{f} \right) \right) \right) \right)$

On encore $I = 4I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a x_s}{\lambda D_s} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi a x}{\lambda f} \right) \right)$

On a bien pour $a = a_1$, $I = 4I_s \quad \forall x$.

$\frac{r}{a}$
a)



5

$$\delta = \frac{(T'_1 T'_2) \cdot x_{s1}}{D_s} + (T_1 T'_1) + (T_2 T'_2) + L_s$$

$$\text{Or } \frac{x_{s1}}{D_s} = \frac{\theta}{2} ; T_1 T'_1 = \frac{a}{2} \sin \alpha = T_2 T'_2 ; T'_1 T'_2 = a \cos \alpha$$

d'où

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(a \frac{\theta}{2} \cos \alpha - a \sin \alpha + L_s \right)$$

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(-a \frac{\theta}{2} \cos \alpha - a \sin \alpha + L_s \right)$$

b) On a

$$I_1 = 2I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(a \frac{\theta}{2} \cos \alpha - a \sin \alpha + L_s \right) \right) \right)$$

et

$$I_2 = 2I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(-a \frac{\theta}{2} \cos \alpha - a \sin \alpha + L_s \right) \right) \right)$$

D'où

$$I \equiv I_1 + I_2 = 4I_s \left(1 + \cos \left(\frac{\pi a \theta \cos \alpha}{\lambda} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_s - a \sin \alpha) \right) \right)$$

Ce qui correspond à l'expression donnée si

$$\underline{b = a \cos \alpha \text{ et } l = -a \sin \alpha}$$

c) Contraste nul si $\frac{\pi b \theta}{\lambda} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

La valeur minimale de θ est donc

$$\underline{\theta_{\min} = \frac{\lambda}{2b} = \frac{\lambda}{2a \cos \alpha} = 21,4 \text{ m}''}$$

l'intérêt de ce dispositif est de faire en sorte que le paramètre a ne soit plus contraint par la taille de l'instrument. Or c'est précisément a qui détermine la résolution angulaire. On a ainsi repoussé les limites de ce type de mesure. (Ici a a quelques mètres mais rien n'interdit d'imaginer des dispositifs dont la base a serait de quelques dizaines ou centaines de mètres...) (6)

d) On a jusqu'ici supposé la lumière strictement monochromatique et ainsi passé sous silence la longueur de cohérence de la source L_c .

On ne pourra en réalité observer des interférences que si les différences de marche δ_1 et δ_2 sont très petites devant cette longueur de cohérence.

ordre de grandeur : doublet du sodium $L_c \sim 0,5 \text{ mm}$

. lumière blanche (étale non filtrée) $\rightarrow L_c \ll 0,5 \text{ mm}$

Donc $\delta_1 \ll L_c$ avec a en quelques mètres

ne peut être vérifiée que si L_s est ajustée de façon à compenser le plus précisément possible le terme $l = -$ ainsi. Voilà pourquoi il est indispensable de choisir L_s telle que

$$L_s + l = 0.$$

IV

a) En reprenant les résultats de la question IV a), on peut écrire :

$$I = 2I_{s_1} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{x}{f} \right) \right) \right) + 2I_{s_2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(-\frac{\theta}{2} + \frac{x}{f} \right) \right) \right)$$

$$I = 2(I_{s_1} + I_{s_2}) \left[1 + \operatorname{Re} \left(\frac{I_{s_1}}{I_{s_1} + I_{s_2}} e^{\frac{2i\pi a}{\lambda} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{x}{f} \right)} + \frac{I_{s_2}}{I_{s_1} + I_{s_2}} e^{\frac{2i\pi a}{\lambda} \left(-\frac{\theta}{2} + \frac{x}{f} \right)} \right) \right]$$

$$I = 2(I_{s1} + I_{s2}) \left[1 + \operatorname{Re} \left(e^{\frac{2i\pi a x}{\lambda f}} \times \frac{e^{\frac{2i\pi a \theta}{2\lambda}} + \mu e^{-\frac{2i\pi a \theta}{2\lambda}}}{1 + \mu} \right) \right] \quad (7)$$

Par identification avec l'expression proposée, on obtient :

$$l_s = \frac{\lambda}{\theta} ; \quad C_1 = \frac{1}{1+\mu} ; \quad C_2 = \frac{\mu}{1+\mu}$$

$$\bullet \operatorname{Re}(\underline{Y}_s) = \cos\left(\pi \frac{a}{l_s}\right)$$

$$\bullet \operatorname{Im}(\underline{Y}_s) = \frac{1-\mu}{1+\mu} \sin\left(\pi \frac{a}{l_s}\right)$$

$$\bullet |\underline{Y}_s| = \frac{1 + 2\mu \cos\left(\frac{2\pi a}{l_s}\right) + \mu^2}{(1+\mu)^2}$$

$$\bullet \arg(\underline{Y}_s) \equiv \alpha_s \text{ est tel que } \begin{cases} \tan \alpha_s = \frac{1-\mu}{1+\mu} \tan\left(\frac{\pi a}{l_s}\right) \\ \sin \alpha_s \geq 0 \text{ si } \mu \leq 1 \end{cases}$$

b) On peut réécrire $I(r)$ de la manière suivante :

$$I(r) = 2(I_{s1} + I_{s2}) \left[1 + |\underline{Y}_s| \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda f} + \alpha_s\right) \right]$$

$$\text{d'où } I_m = 2(I_{s1} + I_{s2}) [1 + |\underline{Y}_s|]$$

$$I_n = 2(I_{s1} + I_{s2}) [1 - |\underline{Y}_s|]$$

On en déduit alors que

$$V = |\underline{Y}_s|$$

$$c) V = \frac{1 + 2\mu \cos\left(\frac{2\pi a}{l_s}\right) + \mu^2}{(1+\mu)^2} \text{ donc } \begin{cases} V_m = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 \\ V_n = 1 \end{cases} \text{ si } \mu=1, \begin{cases} V_m = 0 \\ V_n = 1 \end{cases}$$

$$d) \text{ On a } \frac{2\pi a_1}{l_s} = \pi \text{ donc } l_s = \frac{\lambda}{\theta} = 2a_1 \text{ donc } \theta = \frac{\lambda}{2a_1} = 56,2 \text{ m}''$$

$$V_m = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 \text{ donc } \mu = \frac{1 - \sqrt{V_m}}{1 + \sqrt{V_m}} = 0,26 \quad \left(\text{car } \alpha_s > 0 \Rightarrow \frac{1-\mu}{1+\mu} > 0 \right)$$