Corrigé non rédigé

Chute d'un arbre mort :

16) Écrivons le repos du bucheron : $\begin{cases} T_2 - F\cos\alpha = 0 \\ N_2 - mg + F\sin\alpha = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Car PFD sur corde donne } \vec{F}_{\text{corde}\to\text{bucheron}} = -\vec{F}}$

$$\underline{T_2 = F\cos\alpha \quad ; \quad N_2 = mg - F\sin\alpha}$$

Non glissement $\Rightarrow |T_2| < f|N_2|$

$$\Rightarrow F < mg \cdot \frac{f}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \hat{=} F_{max}$$

17) Écrivons le repos de l'arbre : $\begin{cases} T_1 + F\cos\alpha = 0 \\ N_1 - Mg - F\sin\alpha = 0 \end{cases}$

Non glissement $\Rightarrow \quad F\cos\alpha < f(Mg + F\sin\alpha)$

$$\Rightarrow \quad F(\cos\alpha - f\sin\alpha) < fMg \qquad (1)$$

Or $\quad 0 \leq F \leq F_{max} \iff F(\cos\alpha + f\sin\alpha) \leq fmg$

De plus, $\quad m < M \quad$ et $\quad \cos\alpha - f\sin\alpha \leq \cos\alpha + f\sin\alpha$

Donc, $(0 \leq F \leq F_{max}$ et $m \leq M) \Rightarrow$

$$\left(F(\cos\alpha - f\sin\alpha) \leq F(\cos\alpha + f\sin\alpha) \leq fmg \leq fMg \right)$$

Donc $\underline{(0 \leq F \leq F_{max} \text{ et } m \leq M) \Rightarrow (1)}$

Ainsi, si l'homme ne glisse pas, l'arbre ne peut pas glisser.

18) $\Gamma_g \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\Gamma_g} \cdot \hat{u}_y$

$= (\vec{OG} \wedge M\vec{g}) \cdot \hat{u}_y$

$= - Mga$

19) $\Gamma_B \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\Gamma_B} \cdot \hat{u}_y$

$= (\vec{OC} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{u}_y$ (ou $\vec{OB} \wedge \vec{F}$ ...) non demandé !

$= + Fl \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

L'arbre pivote si $\underline{\Gamma_B + \Gamma_g > 0}$; $\boxed{\Gamma_B \min = Mga}$

20) On sent tous qu'il y a un angle optimal. La question est de le montrer ...

On pourrait commencer par dire que :

- avec $\alpha \simeq 0$, $\Gamma_B \simeq 0$ et l'arbre ne basculera pas.
- avec $\alpha \simeq \pi/2$, $\Gamma_B \simeq 0$ " " " "

(situations "évidentes" ...)

Pour le reste, je préfère un calcul. Mais je dois comprendre ce qu'on veut optimiser ... : Γ_B

À la question 19, on a trouvé $\Gamma_B = Fl \sin\alpha \cos\alpha$

Soit $\Gamma_B = \frac{1}{2} Fl \sin(2\alpha)$

Avec F donnée, Γ_B est maximal si

$$\underline{\underline{\alpha = \pi/4 \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_m .}}$$

21) si $F = F_{max}$,

$$\Gamma_B = mgl \frac{f}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \times \sin\alpha \cos\alpha = \frac{mgl}{\frac{1}{f \cdot \sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}} \quad \text{CQFD}$$

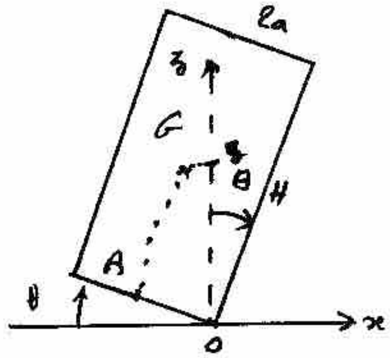
ϕ est minimale en α_m tq $\boxed{\tan\alpha_m = 1/f^{1/3}}$ (si $f = 1$, $\alpha_m = \pi/4$)

22) $F_{max} \simeq 7.10^2 N$; $l_{min} \simeq 14$ m. $(\alpha = \pi/4)$ 3

$F l \sin\alpha\cos\alpha > Mga$ donc $l > \dfrac{Mga}{F\sin\alpha\cos\alpha}$ $F = F_{max}$, $\alpha = \pi/4$

La corde sera donc fixé à près de 10 m de hauteur et le bucheron se tiendra à 10 m de la souche. Valeurs cohérentes...

23)



$E_p = Mg z_G$.

et $z_G = \vec{OG}\cdot\vec{u}_z$ avec $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG}$

$= \begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{H}{2}\sin\theta \\ \frac{H}{2}\cos\theta \end{vmatrix}$

donc $\underline{\underline{E_p = Mg\left(a\sin\theta + \frac{H}{2}\cos\theta\right)}}$

On nous propose un raisonnement énergétique ... Mais en écrivant que θ_s est tel que G est sur la verticale de O, ce serait plus direct.

Suivons l'énoncé. On cherche la position d'équilibre (instable) de l'arbre. Donc θ_s est telle que

$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_s) = 0$ donc $a\cos\theta_s - \frac{H}{2}\sin\theta_s = 0$

(ce qui annule la composante horizontale de $\vec{OG}$...)

donc $\tan\theta_s = \dfrac{2a}{H}$

Chute d'un arbre vivant:

24) $U \sim 100$ km/h. La suite de la question est hors prog en MP.

le nombre en question est le nombre de Reynolds : $\dfrac{\rho_{air}.U.2a}{\eta_{air}} \sim 2.10^7$

→ Régime turbulent donc force en v^2.

↳ $\underline{d\vec{F}_v = 2a\, C_x.\rho_a.U^2 dz\, \vec{u}_x}$

(il manquerait pas un facteur ½ ?).

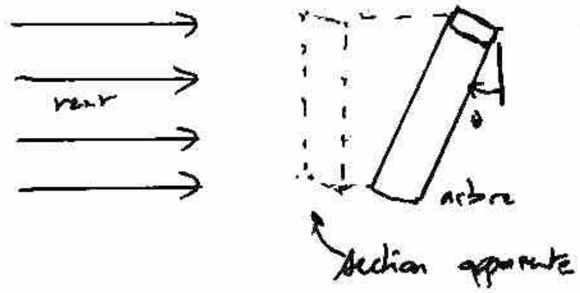
25) $\Gamma_r = \vec{\Gamma}_v \cdot \hat{u}_y$

$$= \hat{u}_y \cdot \int_{z=0}^{H} \underbrace{\left(z\,\hat{e}_z\right) \wedge \left(2a\, C_x\, \rho_a\, U^2\, dz\, \hat{u}_x\right)}_{\vec{OM} \wedge d\vec{F}_v}$$

$$= a\, C_x \cdot \rho_a \cdot U^2 \cdot H^2$$

Remarque : $\Gamma_r \propto H^2$ ...

26) Ce qui intervient dans l'action du vent est la surface apparente :



$S_{app} = S \cdot \cos\theta$

Par ailleurs, le bras de levier (pour chaque élément) passe de z à $z\cos\theta$.

Ainsi, $\underline{m = 2}$.

27) $\theta_c = 10°$; $\beta = 1$

$\searrow \Gamma_r(\theta_c) = 0$ $\quad$ $\searrow \Gamma_r(0) = \Gamma_0$

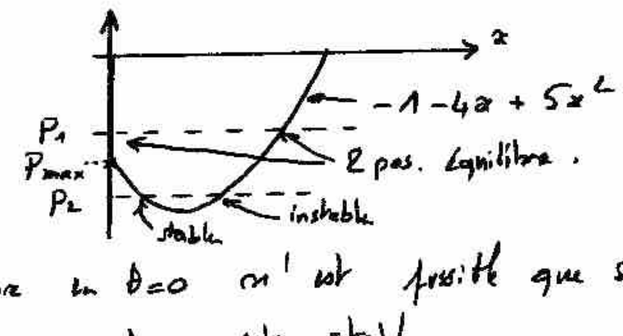
$\dfrac{d\Gamma_r}{d\theta}(\theta_m) = 0 \Rightarrow \underline{\theta_m = \frac{2}{5}\,\theta_c = 4°}$; $\underline{\Gamma(\theta_m) = \frac{9}{5}\,\Gamma_0 = -16{,}2.10^3\, N.m}$

Valeurs conformes au graphe.

28). Équilibre $\Rightarrow \Gamma_v + \Gamma_r(\theta) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\Gamma_r(\theta)}{\Gamma_0} = P$ $\qquad$ on pose $x = \dfrac{\theta}{\theta_c}$.

$\Rightarrow \left(-1 - 4x + 5x^2 = -P \quad \text{ou} \quad -1 < -P\right)$



- l'équilibre en $\theta = 0$ n'est possible que si $P < P_{max} = 1$
- l'équilibre en $\theta = 0$ est stable
- l'équilibre en $\theta_e \neq 0$ n'est stable que si $\theta_e < \theta_S$: $\underline{\underline{\Gamma_r \text{ décroissante}}}$
- Même si l'équilibre est possible, il n'est pas nécessairement réalisé car l'arbre arrive en θ_e avec une vitesse non nulle ...

29) Écrivons le théorème de l'énergie mécanique : (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot\theta^2\right) = \Gamma_v \underbrace{\dot u \theta_c}_{\dot\theta_c} + \Gamma_0\left(1+4u-5u^2\right)\underbrace{\dot u\theta_c}_{\dot\theta}$$

donc $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot\theta^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\Gamma_v\theta_c u + \Gamma_0\theta_c\left(u+2u^2-\frac{5}{3}u^3\right)\right)$$

donc $$\frac{1}{2}J\dot\theta^2 - 0 = \Gamma_v\theta_c u + \Gamma_0\theta_c\left(u+2u^2-5/_3\,u^3\right)$$ en tenant compte des CI.

donc $$\frac{1}{2}J\dot\theta^2 = |\Gamma_0|.\theta\left[p - \left(1+2u-\frac{5}{3}u^2\right)\right]$$ $\frac{\Gamma_0}{|\Gamma_0|}=-1$

donc $$\underline{P(u) = p-1-2u+\frac{5}{3}u^2}$$

Toute position atteinte par l'arbre vérifiera $\frac{1}{2}J\dot\theta^2 \geqslant 0$

donc $|\Gamma_0|.\,\theta\,.\,P(u) \geqslant 0$

donc $\underline{P(u) \geqslant 0}$

Le vent déracine l'arbre si $\forall u \in \,]0;1[\,,\ P(u) \geqslant 0$

donc si $P(u_{min}) \geqslant 0$ avec u_{min} tq $P'(u_{min})=0$

donc si $p \geqslant \frac{8}{5} \triangleq p_c$.

$$p=p_c \iff \frac{a\,C_x\,.\,\rho_a U^2H^2}{|\Gamma_0|} = p_c \iff U^2 = \frac{p_c|\Gamma_0|}{a\,C_x\,\rho_a\,H^2}$$

<u>AN</u> : $U = 12\ m.s^{-1} \simeq 43\ km/h$.

30) $p=4/_3<p_c$ $\quad P(u)\geqslant 0 \iff 0\leqslant u \leqslant \frac{3}{5}\left(1-\sqrt{\frac{8-5p}{3}}\right)$

$\underset{\text{pour } p=4/_3}{\iff}\ 0\leqslant u\leqslant 1/5 \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2^\circ$.

Les oscillations de l'arbre se dissipent progressivement (amortissement non pris en compte dans le modèle) et l'équilibre s'établit. (Pour $p=4/_3$ en $u=\frac{2-\sqrt{7/3}}{5}$ soit $\theta_e \simeq 0{,}9^\circ$.