

Corrigé de l'épreuve de Physique - CCP MP 2018

Corrigé proposé par Sylvain Condamin.

1 Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. $\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$

2. On a une trajectoire circulaire uniforme donc $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$. Par application du PFD (ici renommé théorème de la quantité de mouvement...) à l'électron, on obtient

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi m_e \epsilon_0 r}}}$$

3. On a $\boxed{E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$

On a bien $E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} E_p$.

4. On a

$$\vec{L} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} = \sqrt{\frac{r m_e e^2}{4\pi\epsilon_0}} \vec{u}_z,$$

soit

$$\boxed{L = \sqrt{\frac{r m_e e^2}{4\pi\epsilon_0}}}$$

5. On a en remplaçant

$$r_n = n^2 \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}, \text{ soit } \boxed{a_B = \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}}.$$

6. n remplaçant on obtient :

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_e e^4}{32\pi\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}, \text{ soit}$$

$$\boxed{R_y = \frac{m_e e^4}{32\pi\epsilon_0^2 \hbar^2}}$$

7. Le rayon de Bohr correspond dans cette modélisation à un rayon de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.

A.N. $\boxed{a_B = 52,919 \text{ pm}, 13,606 \text{ eV}}$ (il suffit de convertir !)

8. On a $E_m = -\frac{R_y}{n^2}$. Or $E_m = E_p/2 = -E_c$, donc $\frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{R_y}{n^2}$, soit

$$\boxed{v_n = \sqrt{\frac{2R_y}{m_e n^2}}}$$

$$\boxed{v_1 = 2,1877 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}}$$

La vitesse semble faible devant celle de la lumière ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-2}$), donc on peut a priori considérer que le mouvement est non-relativiste.

2 Une résolution simplifiée de l'atome de Bohr par l'équation de Schrödinger (1926)

9. On déduit immédiatement de l'équation de Schrödinger, en simplifiant l'exponentielle :

$$E\kappa(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\kappa(\vec{r}) + E_p(\vec{r})\kappa(\vec{r})$$

10. $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

11. Si on suppose que κ ne dépend que de θ ses dérivées selon θ et selon z sont nulles et donc l'expression du laplacien se simplifie, ce qui donne trivialement l'expression demandée.

On a donc, en remplaçant E par son expression ($E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$), $\frac{d^2\kappa}{d\theta^2} + \eta^2\kappa = 0$.

On en déduit que les solutions sont de la forme $\kappa(\theta) = Ae^{i\eta\theta} + Be^{-i\eta\theta}$

12. Pour que la relation soit vérifiée pour tout θ on doit nécessairement avoir η entier vu la forme obtenue à la question précédente. Donc $R = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\eta^2 = a_B\eta^2$. On retrouve le résultat de la partie

précédente, et, la relation entre énergie et rayon étant inchangée, on a également $E = -\frac{R_y}{\eta^2}$.

On retrouve les mêmes résultats que précédemment, ce qui est plutôt rassurant dans la mesure où, au moins pour l'énergie, ce sont des résultats expérimentaux.

3 Spectre de raies de l'hydrogène

13. l'énergie du photon vaut $E_p = E_{sup} - E_{inf}$. Dans le cas de l'atome d'hydrogène on a $E_{sup} = -\frac{R_y}{n^2}$

et $E_{inf} = -\frac{R_y}{n'^2}$. Comme de plus on a $E_p = \frac{hc}{\lambda}$, on obtient le résultat demandé avec $R_H = \frac{R_y}{hc}$.

14. On calcule $R_H = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Cela permet de compléter le tableau :

Nom de la raie	H_α	H_β	H_γ	H_δ
$\lambda_{Ritz} \text{ (nm)}$	656,10	486,00	433,93	410,06
$\lambda_{exp} \text{ (nm)}$	$656,3 \pm 0,3$	$486,1 \pm 0,2$	$434,0 \pm 0,2$	$410,2 \pm 0,2$

Les intervalles d'incertitude englobent tout à fait les valeurs de Ritz.

4 Corrections relativistes de Sommerfeld (1916) : introduction de la constante de structure fine

15. On a $v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}$, ce qui donne $\alpha = v_1/c$.

16. A.N. $\alpha = 7,2974 \cdot 10^{-3}$ et $1/\alpha = 137,03$

17. Si on ne fait pas de mesures extrêmement précises on peut approximer $E_{n,l}$ à E_n (c'est la limite pour $\alpha \rightarrow 0$) Pour un n donné on a n valeurs possibles de l donc n sous-états.

Les sous-niveaux (n, l) sont, de haut en bas, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ (les niveaux de l le plus élevé ont l'énergie la plus petite en valeur absolue, donc la plus grande sur le diagramme).

On a en remplaçant $\Delta E_f = \frac{R_y\alpha^2}{16} = 4,5283 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$

18. On a $E = hc\sigma$, et l'écart d'énergie entre les deux photons vaut ΔE_f , étant donné que le niveau de départ est le même.

On en déduit $\Delta\sigma = \frac{\Delta E_f}{hc} = 0,36524 \text{ cm}^{-1}$

19. On a $\lambda_m = 656,2799 \text{ nm}$ (valeur proche mais significativement différente de λ_{Ritz}). Le doublet est donc rouge.

L'écart relatif vaut $2,36 \cdot 10^{-5}$, contre $1,0 \cdot 10^{-3}$ pour le doublet du sodium. On a donc un doublet nettement plus fin que celui du sodium.

5 Résolution interférométrique d'un doublet spectral

20. (Rq : la description est un peu trompeuse, car seule une des lames est semi-réfléchissante) Les deux lames sont la lame séparatrice, lame de verre dont l'une des faces est semi-réfléchissante, et la compensatrice, lame de verre identique à la première, mais non réfléchissante. La compensatrice est indispensable pour compenser la différence de marche induite par la traversée de la séparatrice (si la face avant est éfléchissante, seul le rayon transmis traverse la lame, l'autre devra donc traverser la compensatrice pour éviter de déphaser les deux rayons).

21. On trace le symétrique S' de S par rapport au miroir, et on en déduit par prolongement la trajectoire du rayon réfléchi, ainsi que la trajectoire du symétrique du rayon incident, qui se réfléchit sur le symétrique M'_1 du miroir M_1 . On peut pour plus de précision tracer les symétriques S'_1 et S'_2 de S' par rapport à M'_1 et M_2 : les rayons réfléchis passent par ces points (je les ai omis sur la figure 1 pour des raisons de lisibilité et de compacité mais telle que la question est posée il faut les mettre)

22. La définition du point Q_1 n'est pas cohérente : j'ai pris pour ma part l'intersection avec le rayon r_1 . Pour la suite du tracé il faut prendre un rayon guide parallèle à r_1 et r_2 et passant par O , qui nous permet par prolongement d'obtenir le point K (image d'un objet à l'infini) par lequel passent donc les deux rayons émergent de l'interféromètre.

23. Il s'agit de franges circulaires.

24. On a dans ce cas $\delta = 2Q_2Q_1 = 2e$.

25. $p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} = \delta\sigma_1$ et de même $p_2 = \delta\sigma_2$

26. Il y a brouillage lorsque $p_1 - p_2$ est demi-entier, soit $p_1 - p_2 = (n + 1/2)$.

Soit $\delta\Delta\sigma = (n + 1/2)$.

On a donc $D_\delta\Delta\sigma = 1$, soit $D_\delta = 1/\Delta\sigma$. Ces situations sont appelées anticoïncidences.

On a $D_e = D_\delta/2 = \frac{1}{2\Delta\sigma} = 1,39 \text{ cm}$.

27. La question est peu claire car la définition du déplacement serait à préciser. En considérant ce qui paraît le plus logique, c'est à dire le déplacement entre la première et la sixième anticoïncidence, on aurait $5D_e$, soit $L_0 = 800D_e = 11,1 \text{ m}$

28. Les bras parcourent grossièrement la diagonale d'un carré de côté $1,1 \text{ m}$. On a $7,5$ allers-retours, mais, comme la diagonale n'est pas entièrement parcourue, on peut considérer que la distance perdue est de l'ordre d'une demi-diagonale. On obtient alors $L_0 \simeq 7 \times \sqrt{2} \times 1,1 \text{ m} = 11 \text{ m}$, ce qui paraît tout à fait compatible avec notre estimation précédente.

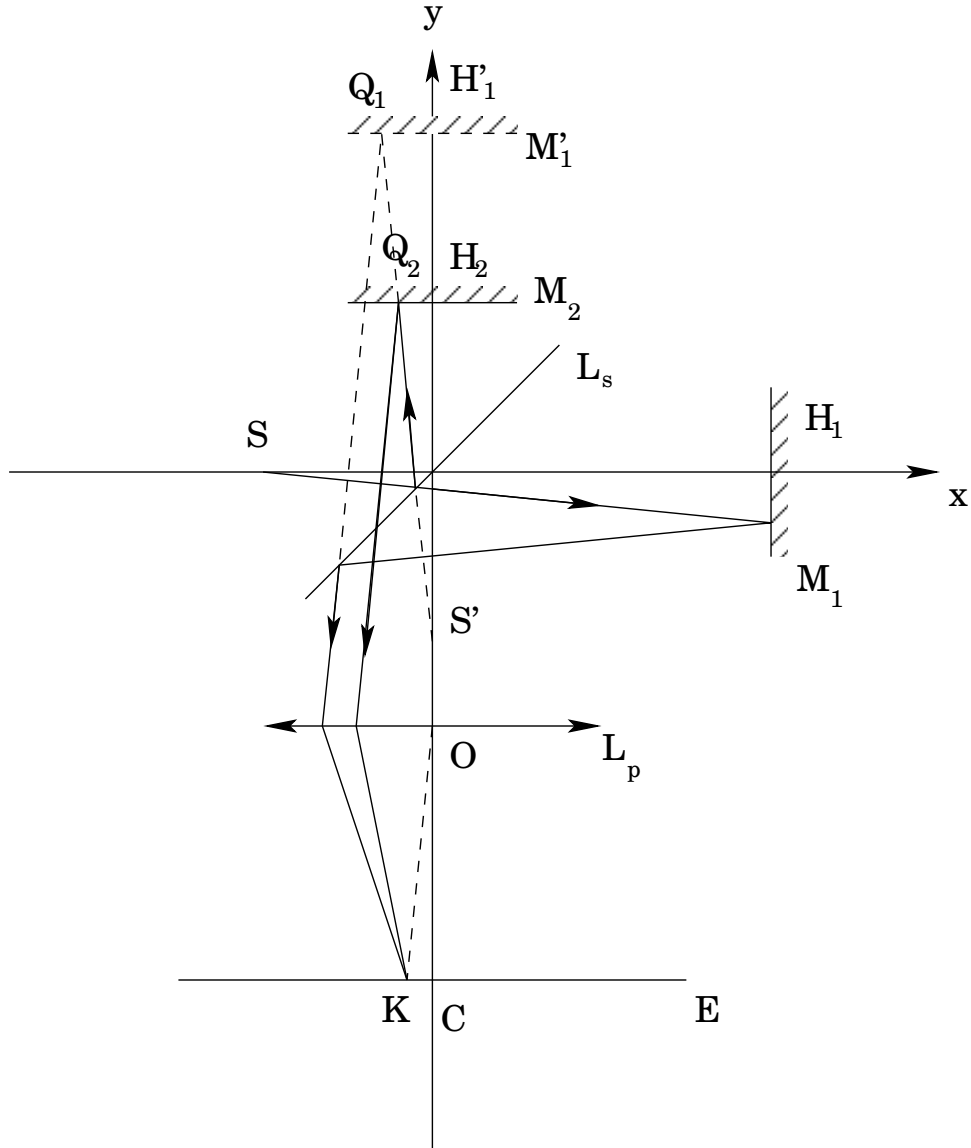


FIGURE 1

6 Calcul d'une structure fine par l'interaction spin-orbite

29. Déjà traité... $\vec{L} = m_e r v \vec{u}_z$

30. Dans le référentiel de l'électron le proton tourne également dans le sens trigonométrique. Le courant I moyen circulant dans le cercle de rayon r vaut e/T , où $T = 2\pi r/v$ est la période de rotation du proton.

On a donc $I = \frac{ev}{2\pi r}$. On en conclut :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 e}{4\pi r^3} \vec{L}}$$

31. En remplaçant on obtient :

$$E = \frac{g_e \mu_0 e^2}{8\pi r^3 m_e} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

Or, l'identité donnée se réécrit $\frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e} = \frac{a_B^3 \alpha^2 R_y}{\hbar^2}$, ce qui donne immédiatement la relation demandée, en injectant dans la relation précédente.

32. L'expérience historique ayant permis de prouver la quantification du moment magnétique (mais pas directement du moment cinétique, et en tout cas pas du moment cinétique orbital!) est celle de Stern et Gerlach. Elle consistait à faire passer des atomes d'argent dans un champ magnétique variable, ce qui exerçait sur les atomes une force dépendant de leur moment magnétique. Le résultat a été une division du faisceau en deux, montrant la quantification du moment magnétique. (en l'occurrence du au spin de l'électron célibataire)

33. Il s'agit simplement de la moyenne de $(a_B/r)^3$, puisque $|\Psi^2|$ est une densité de probabilité.

34. Le calcul de l'intégrale I donne :

$$I = \iiint \frac{1}{64\pi a_B^2 r} \sin^2 \theta e^{-r/a_B} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

En séparant les intégrales et en effectuant l'intégrale triviale sur ϕ on obtient :

$$I = \frac{1}{32a_B^2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^\infty r e^{-r/a_B} dr$$

Après un changement de variable pour la première intégrale et une IPP pour la seconde on obtient :

$$I = \frac{1}{32a_B^2} \int_1^{-1} (x^2 - 1) dx \left(\left[-ra_B e^{-r/a_B} \right]_0^\infty + \int_0^\infty a_B e^{-r/a_B} dr \right)$$

Soit :

$$I = \frac{1}{32a_B^2} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{-1} \left[-a_B^2 e^{-r/a_B} \right]_0^\infty$$

On a donc $\boxed{I = \frac{1}{24}}$

35. Les états possibles sont :

— $l = 0, j = \frac{1}{2} : E_{SO} = 0$

— $l = 1, j = \frac{1}{2} : E_{SO} = -\frac{g_e \alpha^2 R_y}{24}$

— $l = 1, j = \frac{3}{2} : E_{SO} = \frac{g_e \alpha^2 R_y}{48}$

On a $\boxed{\Delta E_{SO, n=2} = \frac{g_e \alpha^2 R_y}{16}}$

Après l'analyse de Thomas et en faisant l'approximation $g_e \simeq 2$, on obtient :

$$\Delta E_{SO, n=2} = \frac{\alpha^2 R_y}{16}.$$

On retrouve la formule de Sommerfeld. En revanche on observe un niveau d'énergie supplémentaire qui n'était pas donné par la formule de Sommerfeld.

7 Encore plus fin (!) : La structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène

36. Cette fréquence est facilement détectable et modulable, et le fait qu'elle soit associée à l'atome le plus simple et le plus courant de l'Univers lui donne un caractère universel. La fréquence ν vaut bien c/λ .

On a $\boxed{\Delta E_{hfe} = h\nu = 5,88.10^{-6} \text{ eV}}$.

37. L'unité de moment magnétique est le A.m^2 (à partir de $M = IS$)

Une application numérique directe à partir des valeurs du document 2 donne :

$$\boxed{\mu_B = 9,2848.10^{-24} \text{ A.m}^2 \text{ et } \mu_N = 1,4107.10^{-26} \text{ A.m}^2}$$

38. Pour réaliser une estimation on considérera que l'axe des spins et l'axe de rotation sont identiques. Cette hypothèse est contestable, mais devrait donner un ordre de grandeur correct. D'autres choix de positionnement donnent des résultats différents, ce que l'énoncé n'a visiblement pas envisagé. Un moyennage sur la sphère de rayon a_B donnerait même un résultat nul!

On a alors $\theta = \pi/2$ et donc, au niveau de l'électron, $\vec{B}_N = -\frac{\mu_N \mu_0}{4\pi a_B^3} \vec{u}_z$. L'écart entre les deux énergies possibles $\pm B_N \mu_B$ vaut

$$\boxed{\Delta E_{hf, classique} = \frac{\mu_0 \mu_B \mu_N}{2\pi a_B^3}}$$

39. Le calcul donne $\Delta E_{hf} = 5,8840.10^{-6} \text{ eV}$ ce qui est cohérent avec la valeur précédente.
40. Il s'agit de la transition hyperfine du césium qui intervient dans la définition de la seconde.